GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ

CFPA

MATEMÀTIQUES

Preparació Prova d'accés a Cicles Superiors

CFPA La Pobla Llarga

BLOQUE 1 : ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

- Los conjuntos numéricos.
  - Los números naturales, enteros y racionales. Operaciones.
  - Los números reales. Ordenación. Valor absoluto. Distancia. Intervalos.
  - Proporcionalidad. Magnitudes directa e inversamente proporcionales.
  - Potencias y raíces. Logaritmos decimales.
- Polinomios.
  - Expresiones polinómicas. Valor numérico.
  - Operaciones con polinomios.
  - Algoritmo de Ruffini. Teorema del resto.
  - Raíces y factorización de un polinomio.
- Ecuaciones.
  - Ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.
  - Ecuaciones polinómicas con raíces sencillas.
  - Ecuaciones exponenciales y logarítmicas sencillas.
- Sistemas de ecuaciones.
  - Sistemas de ecuaciones lineales.
  - Sistemas compatibles e incompatibles.
  - Resolución de sistemas de ecuaciones con 2 o 3 incógnitas.
  - Planteamiento de sistemas de ecuaciones.

1. El número natural. Conjunto N. Operaciones

Los números naturales: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... son los números que utilizamos para contar. Una propiedad característica de este conjunto numérico es que «todo número natural tiene un siguiente». La sucesión de números naturales es, pues, ilimitada.

En el conjunto de los números naturales son siempre posibles una serie de operaciones y otras no. Así la suma y la multiplicación son siempre posibles, mientras que no lo son siempre la resta y la división.

1.1. Suma de números naturales

La suma de números naturales es una ley de composición interna. Esto quiere decir que a cada par de números naturales (a, b) le corresponde un único número natural, que es el resultado de $a + b$.

1.1.1. Propiedades de los números naturales

1) Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

   Ejemplo: $(2 + 3) + 7 = 2 +(3 + 7)$

2) Conmutativa: $a + b = b + a$

   Ejemplo: $5 + 7 = 7 + 5$

3) Elemento neutro: $a + 0 = 0 + a = a$

   Ejemplo: $4 + 0 = 0 + 4 = 4$

1.2. Producto de números naturales

El producto de números naturales es una ley de composición interna. A cada par de números naturales (a, b) le corresponde un único número natural que es el resultado de a x b.

1.2.1. Propiedades del producto de números naturales

1) Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

   Ejemplo: $(2 \cdot 3) \cdot 7 = 2 \cdot (3 \cdot 7)$

2) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

   Ejemplo: $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$

3) Elemento neutro: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

   Ejemplo: $4 \cdot 1 = 1 \cdot 4 = 4$

4) Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

   Ejemplo: $4 \cdot (2 + 9) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9$

1.3. Ordenación de los números naturales

Dados dos números naturales (a, b) se dice que a es menor que b, y se escribe $a < b$ cuando existe otro número natural c tal que $a + c = b$.

También se dice que b es mayor que a y se escribe $b > a$.

Así, la serie de números naturales se puede ordenar:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

2. Definición de número entero. Conjunto Z

Como dijimos, en el conjunto de los números naturales (N) siempre es posible la suma (también la multiplicación). Así, entre dos números naturales cualesquiera el resultado de la suma es otro número natural. No ocurre lo mismo con la resta, ya que si bien podemos restar 6 – 2 = 4, no podemos 2 – 6 = ?

Para resolver este problema aparece el conjunto de números enteros. Podemos definir que un número entero es aquel que resulta de restar dos números naturales cualesquiera.

Si restamos el menor del mayor, el resultado es un número positivo: 5 – 3 = +2.

Si restamos el mayor del menor, el resultado es un número entero negativo: 3 – 5 = –2.

También podemos definir número **Entero** como par ordenado de números naturales.

Ejemplo: (7, 3) = 7 – 3 = +4. Si el primer número del par es mayor que el segundo el resultado es entero positivo.

(3, 7) = 3 – 7 = –4. Si el primer número del par es menor que el segundo el resultado es entero negativo.

El cero es un número entero, ya que al restar dos números naturales iguales obtenemos siempre cero.

Ejemplo: 6 – 6 = 0. El cero no tiene signo.

Llamamos Z al conjunto de los números enteros, Z^+ al conjunto de los enteros positivos y Z^- al conjunto de los enteros negativos. Así, Z es igual a Z^+, Z^-, 0.

2.1. Valor absoluto de un número entero

Es el valor del número entero prescindiendo del signo. Se simboliza el valor absoluto colocando al número entre dos barras: $|+4| = 4$; $|-4| = 4$; $|-13| = 13$; $|+13| = 13$.

3. Operaciones, propiedades y reglas

3.1. Suma

Al sumar dos números enteros siempre resulta otro número entero.

Regla

Para sumar dos números enteros de signos iguales se suman los valores absolutos y se pone el mismo signo.

Para sumar dos números enteros de signos distintos se restan los valores absolutos y se pone el signo del que tenga mayor valor absoluto.

Significado de los paréntesis

En el cálculo operativo, un paréntesis indica la prioridad de la operación encerrada en ese paréntesis.

Ejemplo: $3 + (5 + 4)$ el paréntesis señala que hay que sumar primero $5 + 4 = 9$ y después sumar el 3; $3 + (5 + 4) = 3 + 9 = 12$.

Una vez efectuada la operación se elimina el paréntesis. También se usan corchetes y llaves para indicar operaciones entre paréntesis.

Ejemplos:

$[(4 - 5) + 3] + 2 = [-1 + 3] + 2 =$
$= 2 + 2 = 4$

$\{(6 - 3) - (7 + 5)\} - (6 + 2) = \{3 - 12\} -$
$- 8 = - 9 - 8 = - 17$

Para sumar dos números negativos, sumamos los valores prescindiendo del signo (valor absoluto) y colocamos el signo - al resultado.

Ejemplo: $-3 + (-4) = -3 - 4 = -7$

3.1.1. Propiedades

1) **Asociativa**:

   $a + (b + c) = (a + b) + c$

   $3 + (4 + 7) = (3 + 4) + 7$

   $-2 + [3 + (-6)] = (-2 + 3) + (-6)$

2) **Conmutativa**: El orden de los sumandos no altera la suma.

   $a + b = b + a$

   $4 + 7 = 7 + 4$

   $5 + (-2) = (-2) + 5$

   $7 - 3 = 7 + (-3) = - 3 + 7 \neq 3 - 7$

   La resta no es conmutativa

   $\neq$ simboliza «no es igual».

3) **Elemento neutro**: El cero sumado a cualquier número deja invariable a dicho número.

   $0 + a = a + 0 = a$

   $0 + 5 = +5$; $-3 + 0 = -3$; $0 - 2 = -2$; $4 + 0 = 4$.

4) **Opuesto de un número entero**: Es aquel número que sumado al primero da como resultado cero.

   $- a + a = 0$

   $- 3 + 3 = 0$ (-3 es opuesto de $+3$).

   Para **restar** dos números enteros basta con sumar al primero el opuesto del segundo.

   $3 - 4 = 3 + (-4) = -1$

Ejemplos:

Efectuar las operaciones indicadas.

1) $2 + (-3) + 4 - (-5) = 2 - 3 + 4 + 5 =$
   $= (2 - 3) + (4 + 5) = (-1 + 9) = + 8$

2) $3 - [-2 + (4 - 3)] + (2 - 5) = 3 - [-2 +$
   $+ 1] + (2 - 5) = 3 - (-1) + (-3) = (3 +$
   $+ 1) - 3 = 4 - 3 = 1$

3) $(4 - 6) + 7 - [-2 + (3 - 5)] = -2 + 7 -$
   $- [-2 + (-2)] = (-2 + 7) - [-2 - 2] = 5 -$
   $- [-4] = 5 + 4 = 9$

Resolver

4) $[6 - (5 - 4)] + [3 - (-2)] =$

   (Sol. $+ 10$)

5) $[3 + (-5 + 2)] + [4 - (7 + 3)] =$

   (Sol. $- 6$)

6) $11 - [- (-10) + (-5)] + (1 - 4) =$

   (Sol. $+3$)

7) $(7 - 8) - [6 + (-3 - 2)] =$

(Sol. -2)

Nota: Los números enteros positivos podemos representarlos con el signo (+) delante o sin él. Ejemplo: $4 = +4$.

3.2. Multiplicación

Al multiplicar dos números enteros siempre resulta otro número entero.

Regla de los signos

$+ - = -$ Más seguido de menos es igual a menos.

$- + = -$ Menos seguido de más es igual a menos.

$- - = +$ Menos seguido de menos es igual a más.

$+ + = +$ Más seguido de más es igual a más.

Repasemos las **Reglas de los signos** para multiplicar, utilizando algunos ejemplos:

$(+3) \cdot (-4) = -12$
$(-3) \cdot (+4) = -12$
$(-3) \cdot (-4) = +12$
$(+3) \cdot (+4) = +12$
$-(-3) = (-1) \cdot (-3) = +3$
$-(+3) = (-1) \cdot (+3) = -3$

3.2.1. Propiedades

1) **Asociativa**:

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$[(-3) \cdot 4] \cdot 5 = (-3) \cdot (4 \cdot 5)$

$[(-2) \cdot (-4)] \cdot 3 = (-2) \cdot [(-4) \cdot 3]$

2) **Conmutativa**:

$a \cdot b = b \cdot a$

$(-4) \cdot 5 = 5 \cdot (-4)$

3) **Elemento neutro**:

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

$1 \cdot (-3) = -3$; $7 \cdot (+1) = 7$

El número 1 [(+1 es igual a 1] multiplicado por cualquier número entero, es igual siempre a dicho número entero.

4) **Distributiva**

De la multiplicación respecto a la suma.

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ejemplo:

a) $3 \cdot [5 + (-3) + 7] = 3 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 7$

b) $-[6 + (-2) + (-5)] = (-1) \cdot [6 + (-2) + (-5)] = (-1) \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-5)$

Ejemplos:

1) $-(-2 - 3) \cdot [1 - 2 \cdot (4 - 6)] = -(-5) \cdot [1 - 2 \cdot (-2)] = 5 \cdot [1 + 4] = 25$

2) $3 - 2 \cdot [5 - (1 - 3)] = 3 - 2\,[5 - (-2)] = 3 - 2 \cdot [5 + 2] = 3 - 2 \cdot [7] = 3 - 14 = -11$

3) $[(-4 + 7) \cdot 3 - 5] \cdot 2 - 6 = [(3) \cdot 3 - 5] \cdot 2 - 6 = [9 - 5] \cdot 2 - 6 = [4] \cdot 2 - 6 = 8 - 6 = 2$

Resolver

4) $14 - 3 \cdot (2 - 5) + [1 - 6 \cdot (-3) + (-2)] =$

(Sol. 40)

5) $[2 \cdot (5 - 7) - (4 - 8)] \cdot 3 \cdot [6 - 4 \cdot (1 - 3)] =$

(Sol. 0)

6) $5 \cdot (-2) + (-3) \cdot [2 - (-1) \cdot (5 - 4) + (-3)] =$

(Sol. -10)

7) $7 - 5 + 2 \cdot [4 - (-1 - 4) + 3 \cdot (2 - 5)] - 3 =$

(Sol. -1)

4. Representación gráfica del número entero

Los números enteros los representamos gráficamente en una recta, partimos del número cero (0), a la derecha colocamos los positivos y a la izquierda los negativos.

... -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 ...

Cada subdivisión de la recta será un número entero.

5. Ordenación

Los números enteros se pueden ordenar de menor a mayor (y viceversa).

– 4 menor que –3 menor que –2 ... menor que 0 menor que 1...

$-4 < -3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4.$

6. División en Z

Como vimos en el tema referente a los números enteros, la suma, resta y multiplicación son operaciones internas en Z, esto es, al efectuar dichas operaciones entre dos números enteros cualesquiera, siempre resulta otro número entero.

Ejemplo: $+6 + (-5) = 1$; $+7 - (+4) = +3$; $(+3) \cdot (-2) = -6$

Sin embargo, al dividir dos números enteros no siempre el resultado es otro número entero.

Ejemplo: 6 : 2 = 3 si es entero; 6 : 5 = ? no es posible

Por tanto, la división no es una operación interna en el conjunto de los números enteros.

7. Fracción. Fracciones equivalentes

Fracción es un par ordenado de números enteros, de manera que el segundo término del par divide al primero (no siempre de manera exacta). Se podría decir que una fracción es un cociente indicado de dos números enteros, siempre que el segundo no sea cero.

Sean $a, b \in Z$ $(a,b) = \frac{a}{b}$ es una fracción

$$(2,\ -3) = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3};\ (-5,\ -3) = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3};$$

$$(-4,\ 2) = \frac{-4}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

Nota: No es posible la división por 0.

Equivalencia de fracciones

Una fracción es **irreducible** cuando el numerador y el denominador son primos entre sí, esto es, cuando ambos tienen de m.c.d. la unidad.

Ejemplos:

$\frac{3}{2}, \frac{25}{27}, \frac{8}{3}$, son irreducibles

Una fracción es **reducible** cuando ambos términos se pueden dividir por un mismo número distinto de 1.

Ejemplos:

$\frac{4}{10}, \frac{6}{18}, \frac{7}{14}$ son reducibles

Reducimos una fracción, dividiendo ambos términos por un divisor común:

$\frac{6}{18} = \frac{3}{9}$ hemos dividido por 2

Reducimos totalmente una fracción cuando dividimos ambos términos por su m.c.d.

Ejemplos:

$\frac{12}{18}$ m.c.d. $(18, 12) = 6$

Dividimos ambos términos por 6, $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si se verifica que $a \cdot d = b \cdot c$; ejemplo: $\frac{4}{3}$ y $\frac{12}{9}$, $4 \cdot 9 = 12 \cdot 3 = 36$

Dos fracciones equivalentes pueden reducirse totalmente a una misma **fracción irreducible**.

Ejemplos:

$\frac{6}{15}$ y $\frac{12}{30}$ son equivalentes $6 \cdot 30 = 12 \cdot 15 = 180$, ambas se reducen a $\frac{2}{5}$

Signo de una fracción

Una fracción es negativa cuando numerador y denominador tienen distinto signo:

$$\frac{-4}{+5} = -\frac{4}{5}, \quad \frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Una fracción es positiva cuando numerador y denominador tienen el mismo signo:

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}, \quad \frac{+3}{+4} = \frac{3}{4}$$

Una fracción es un **operador**: una fracción aplicada a un número cualquiera efectúa dos operaciones con él.

Ejemplos:

$\frac{4}{5} \cdot 10$ decimos $\frac{4}{5}$ de 10 y hacemos $(4 \cdot 10) : 5 = 40 : 5 = 8$.

Esto es, hemos multiplicado el número 10 por el numerador 4 y hemos dividido por el denominador 5.

$\frac{3}{2} \cdot 12 = 3 \cdot (12 : 2) = 3 \cdot (6) = 18$

Ahora dividimos por 2 y después multiplicamos el resultado por 3.

El orden de aplicación de las operaciones de multiplicar y dividir es indiferente, esto es, la división y la multiplicación se pueden conmutar.

$$(6 : 2) \cdot 4 = (6 \cdot 4) : 2 = 12$$

8. Número racional. Conjunto Q

Todas las fracciones equivalentes entre sí, representan un solo **número racional**. Así puede decirse que número racional es una fracción y todas las que son equivalentes a ella.

Ejemplos:

$$\frac{3}{6} = \frac{7}{14} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

Todas estas fracciones representan al mismo número racional: $\frac{1}{2}$

Podemos clasificar los números racionales en dos tipos:

a) Cuando el denominador divide al numerador de manera exacta, entonces se llama al número entero. El conjunto de los números enteros lo representamos por Z.

   Ejemplos:

   $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{-8}{2} = -4$; son números racionales enteros.

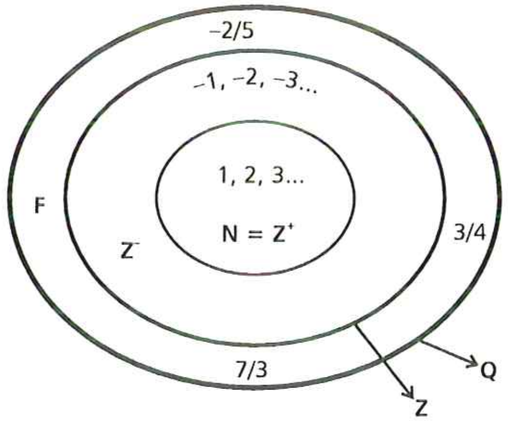
b) Cuando el denominador no divide de manera exacta al numerador, entonces se llama número **fraccionario**. El conjunto de los números fraccionarios lo representamos por F.

   Ejemplos:

   $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; $\frac{5}{-10} = -\frac{1}{2}$; son números racionales fraccionarios.

El conjunto de los números racionales se designan por Q y está formado por la unión de los conjuntos Z y F.

$$Q = \{Z \cup F\}$$



9. Operaciones con números racionales

9.1. Suma

Al sumar dos números racionales siempre resulta otro número racional.

9.1.1. Propiedades

1. **Uniforme**: La suma de dos o más números racionales tiene resultado único independientemente de las fracciones que representen a cada uno.

Ejemplo:

$\frac{4}{5}+\frac{6}{3}+\left(-\frac{8}{9}\right)=\frac{86}{46}$ podemos usar $\frac{8}{10}$ que es equivalente a $\frac{4}{5}$; $\frac{30}{15}$ equivalente a $\frac{6}{3}$ y $\frac{-40}{45}$ equivalente a $\frac{-8}{9}$;

$$\frac{8}{10}+\frac{30}{15}+\left(\frac{-40}{45}\right)=\frac{172}{90}=\frac{86}{45}$$

2. **Conmutativa**: El orden de los sumandos no varía el resultado de la suma:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{6}{5}+\frac{4}{3}=\frac{4}{3}+\frac{6}{5}$$

3. **Asociativa**:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

Ejemplo:

$$\left[\frac{4}{3}+\left(-\frac{3}{5}\right)\right]+\frac{7}{6}=\frac{4}{3}+\left[\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{7}{6}\right]$$

4. **Elemento neutro**: El cero es un número racional. Todas las fracciones de la forma $\frac{0}{a}$ son equivalentes y representan al 0.

El número racional 0 sumado a cualquier otro número racional resulta siempre este último.

$$\frac{0}{a}+\frac{b}{c}=\frac{b}{c}+\frac{0}{a}=\frac{b}{c}$$

Ejemplo:

$$\frac{3}{5}+0=\frac{3}{5}$$

5. **Opuesto**: El opuesto de un número racional es otro número racional que es igual al primero, en valor absoluto, pero con signo contrario.

$$\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}\right)=0$$

Ejemplo:

El opuesto de $\frac{4}{5}$ es $-\frac{4}{5}$ ya que $\frac{4}{5}+\left(-\frac{4}{5}\right)=0$

9.1.2. Regla para sumar números racionales

a) Si tienen el mismo denominador: Se suman los numeradores y se deja el mismo denominador. Ejemplo:

$$\frac{4}{10}+\frac{-3}{10}+\frac{20}{10}+\left(\frac{-6}{10}\right)=$$
$$=\frac{4+(-3)+20+(-6)}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

b) Si tienen distintos denominadores: Se reducen a común denominador; se deja el denominador obtenido y se suman los nuevos numeradores.

Para reducir a común denominador hay que buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan un denominador común. El denominador común será el mínimo común múltiplo de los denominadores. Los numeradores se obtienen dividiendo el m.c.m. por cada denominador y multiplicando el resultado por cada numerador.

Ejemplo:

$$\frac{7}{12}+\frac{6}{15}+\frac{3}{18}=$$

Hallamos el m.c.m. (12, 15, 18) = = 180, y lo colocamos como denominador de cada una de las fracciones:

$$\frac{}{180}+\frac{}{180}+\frac{}{180}$$

Ahora dividimos 180 entre 12 y lo multiplicamos por 7, queda 105. Dividiendo 180 entre 15 y multiplicando por 6 queda 72, y dividiéndolo por 18 y multiplicándolo por 3 queda 30.

$$\frac{105+72+30}{180}=\frac{270}{180}$$

Finalmente simplificamos y para ello haremos el m.c.d. (207, 180) = 9 y dividimos ambos términos por él.

$$\frac{207}{180}=\frac{23}{20}$$

Veamos otro ejemplo:

$$\frac{4}{10}+\frac{13}{40}+\frac{16}{15}+\frac{8}{5}=$$

m.c.m. (10, 40, 15, 5) = 120

$$\frac{}{120}+\frac{}{120}+\frac{}{120}+\frac{}{120};$$

$$\frac{120}{10}\cdot 4=48;\ \frac{120}{40}\cdot 13=39;$$

$$\frac{120}{15}\cdot 16=128;\ \frac{120}{5}\cdot 8=192$$

$$\frac{48}{120}+\frac{39}{120}+\frac{128}{120}+\frac{192}{120};$$

$$\frac{48+39+128+192}{120}=\frac{407}{120}$$

Esta fracción es irreducible, por tanto es el resultado final.

9.2. Resta

Para restar procedemos igual; ejemplo:

$$\frac{6}{14}-\frac{15}{28}-\frac{3}{4}=\frac{12}{28}-\frac{15}{28}-\frac{21}{28}$$

Ahora restamos los numeradores de las fracciones negativas (utilizamos las reglas para sumar y restar números enteros)

$$\frac{12-15-21}{28}=-\frac{24}{28}=-\frac{6}{7}$$

9.3. Multiplicación

Al multiplicar dos números racionales siempre resulta otro número racional. El producto de dos fracciones es igual al producto de los numeradores partido por el producto de los denominadores:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{\mathbf{a\cdot c}}{\mathbf{b\cdot d}}$$

Propiedades

1. **Uniforme**: El producto de dos o más números racionales tiene un resultado único independientemente de las fracciones que representen a cada número:

$$\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$$

podemos poner $\frac{6}{14}$

que es equivalente a $\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{15}$

que es equivalente a $\frac{2}{5}$;

$$\frac{6}{14}\cdot\frac{6}{15}=\frac{36}{210}=$$

(simplificando por 6) $=\frac{6}{35}$

2. **Conmutativa**: El orden de los factores no altera el producto, Ejemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{13}=\frac{6}{13}\cdot\frac{4}{7}$$

3. **Asociativa**:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{7}=\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}\right)$$

4. **Elemento neutro**: El número racional 1, que se puede representar por cualquier fracción en la que el numerador y el denominador sean iguales.

$$\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{a}=\frac{b}{c}$$

Ejemplos:

$\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=1$ es el elemento neutro para la multiplicación.

Ejemplo:

$$1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5};\ \frac{3}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$$

5. **Inverso**: El inverso de un número racional, es otro número racional que multiplicado por el primero da de resultado 1.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

Ejemplo:

$\frac{5}{4}$ es el inverso de $\frac{4}{5}$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=1$$

El inverso también se llama recíproco.

Para hallar el inverso de un número, dividimos 1 por dicho número. El inverso de x será $\frac{1}{x}$. Cuando el número es fraccionario, el inverso se halla cambiando el numerador por el denominador y viceversa: el inverso de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

Ejemplos:

Hallar los inversos de $\frac{8}{3};\ \frac{4}{6};\ -\frac{6}{2};\ -3;$

6) El producto de un número racional por 0 es igual a 0. Ejemplo:

$$\frac{3}{5}\cdot 0=\frac{3}{5}\cdot\frac{0}{1}=\frac{3\cdot 0}{5}=\frac{0}{5}=0$$

9.4. División

Al dividir dos números racionales siempre resulta otro número racional. Para dividir dos números racionales multiplicamos el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplos:

1) $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{21}{20}$

2) $\frac{6}{4}:\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{6}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{48}{12}=-4$

3) $-\frac{5}{12}:\frac{6}{7}=-\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{6}=-\frac{35}{72}$

La división por 0 nunca es posible.

Distributiva: Del producto y de la división respecto de la suma y de la resta:

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{6}{9}+\frac{2}{3}-\frac{8}{7}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{9}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)$$

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{8}{12}-\frac{4}{9}\right):\frac{7}{2}=\frac{3}{7}:\frac{7}{2}+\frac{8}{12}:\frac{7}{2}+\left(-\frac{4}{9}\right):\frac{7}{2}$$

10. Identificación de números racionales. Números decimales. Clasificación

Número racional es todo aquel que se puede expresar como fracción o cociente indicado de dos números. Esta es la regla que nos permite identificar los números racionales.

Así todo número entero es racional porque se puede expresar como fracción.

Ejemplos:

$$+3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2};$$

$$-5=-\frac{5}{1}=-\frac{10}{2}$$

10.1. Número decimal

Cuando dividimos la unidad 1 en diez partes iguales obtenemos 10 décimas. Al dividir $\frac{1}{10}$ decimos que es igual a 0,1 o una décima; $\frac{1}{100}$ o una centésima...

Un número decimal es el que se representa por un número entero seguido de una coma y varias cifras decimales.

Ejemplos: 12,384 = doce con 384 milésimas.

–4,28 = menos cuatro con 28 centésimas.

10.2. Clasificación

10.2.1. Decimales finitos

Son los que tienen un número finito de cifras decimales; ejemplo: 6,54.

Podemos expresarlos como fracción colocando en el numerador el número sin la coma, y en el denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.

$$6{,}43=\frac{643}{100};\ 8{,}163=\frac{8163}{1000}$$

10.2.2. Decimales infinitos

Son los que tienen un número infinito de decimales. Pueden ser de dos tipos: Periódicos y no periódicos.

Periódicos: Un número decimal periódico es aquel que, teniendo infinitas cifras decimales, hay una cifra o grupo de cifras que se va repitiendo indefinidamente 4,6666...; 72,383838...

Se expresan colocando un arco sobre la cifra o grupo de cifras que se repiten, así:

$4{,}666... = 4{,}\widehat{6};\ 72{,}3838... = 72{,}\widehat{38}$

La cifra o grupo de cifras que se repiten se llama periodo.

Fracción generatriz: La fracción obtenida de un decimal periódico se llama fracción generatriz de dicho decimal.

No periódicos: Son números decimales infinitos cuyas cifras no siguen una periodicidad, sino que progresan arbitrariamente. Por ejemplo las raíces cuadradas no exactas de los números enteros positivos:

$\sqrt{2} = 1{,}4142...$

11. Operaciones con números decimales

11.1. Suma y resta

Para sumar o (restar) decimales, se colocan los sumandos (o ambos términos de la resta) de manera que las comas coincidan; se suman o (restan) normalmente como si fueran números naturales y se coloca la coma en el resultado en la misma posición que tiene en cada uno de los números. Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 3{,}708 \\ +\ 41{,}237 \\ 126{,}1421 \\ \hline 171{,}0871 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40{,}238 \\ -\ 3{,}63 \\ \hline 36{,}608 \end{array}$$

11.2. Multiplicación

Para multiplicar dos números decimales, se multiplican sin tener en cuenta las comas y finalmente se coloca una coma al resultado, de manera que haya tantas cifras decimales como suma del número de ellas que tienen ambos factores. Ejemplo:

$$\begin{array}{rl} 64{,}23 & \text{dos cifras decimales} \\ \times\ 2{,}18 & \text{dos cifras decimales} \\ \hline 51384 & \\ 6423\ & \\ 12846\ \ & \\ \hline 140{,}0214 & \text{cuatro cifras decimales} \end{array}$$

11.3. División

Para verlo mejor podemos establecer tres casos:

1. Ambos términos tienen el mismo número de cifras decimales. Se eliminan las comas y se divide normalmente.

   Ejemplos: 2,347:0,213 =; 4,170:21,32 =

$$\begin{array}{l|l} 2347 & 213 \\ \cline{2-2} 0217 & 11 \\ \ \ 004 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 417 & 2132 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Ahora se plantearía el problema de cómo seguir ambas divisiones, en la 1ª se coloca una coma al cociente y se van añadiendo ceros al dividendo hasta que resulte una división exacta, o bien hasta conseguir un determinado número de cifras decimales. En la 2ª colocamos un cero 0, después una coma y se van añadiendo ceros al dividendo hasta obtener un resultado como en el caso anterior.

```
2347 |213          4170  |2132
 217  11,018       20380  0,1955
  400               11920
   1870              12600
    166               1940
```

2. El dividendo supera en cifras decimales al divisor:

```
4,508 |5,3
```

Quitamos las comas y añadimos al divisor tantos ceros como cifras decimales más que él, tenía el dividendo.

Procedemos finalmente como en el caso anterior.

```
45080 |5300
26800  0,85
 0300
```

3. El dividendo tiene menos cifras decimales que el divisor: 345,3:4,72. Quitamos las comas y añadimos al dividendo tantos ceros como cifras decimales más que él, tenía el divisor.

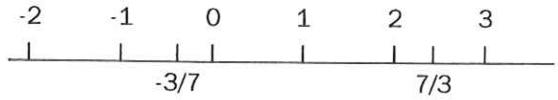
```
34530 |472
```

Dividimos normalmente.

12. Representación gráfica. Ordenación en Q

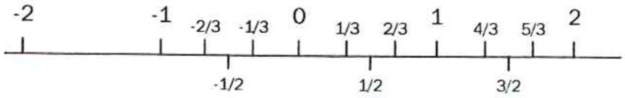
Los números racionales se pueden representar gráficamente en una recta; partimos de 0 y representamos a la derecha los enteros positivos, a la izquierda los enteros negativos. En las subdivisiones de cada intervalo representamos los números fraccionarios. Para representarlos dividimos un intervalo unidad en tantas partes como indica el denominador y tomamos un número de estas partes igual al que indica el numerador.

Por ejemplo representemos $\frac{7}{3}$ y $-\frac{3}{7}$



En la 1ª dividimos cada unidad en 3 partes y tomamos 7 de estas partes.

En la 2ª dividimos las unidades en 7 partes (como es negativo se toma a la izquierda) y se toman 3 de ellas. Esta recta, en la cual representamos los números racionales, se llama recta racional.

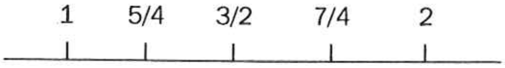


12.1. Propiedad de densidad

En los números racionales se nos plantea un problema, veámoslo con un ejemplo: ¿Cuántos números racionales hay entre 1 y 2?, o bien ¿cuántas subdivisiones se pueden hacer en el intervalo (1,2)?

Siempre podemos obtener el punto medio del intervalo sumando los extremos y dividiendo por dos:

$$\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$$



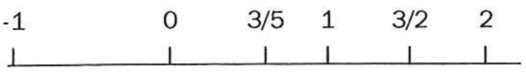
Con los intervalos que quedan volvemos a hacer lo mismo:

$$\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4};\quad \frac{2+\frac{3}{2}}{2}=\frac{7}{4}$$

Y así sucesivamente. Esta operación no termina nunca, se podría repetir hasta el infinito. Concluimos: «Entre cada dos números racionales cualesquiera, existen infinitos números racionales».

12.2. Ordenación en Q

Como vemos en la recta racional se puede representar cualquier número racional; los puntos de la recta representan números racionales. Existe una ordenación: de izquierda a derecha se representan de menor a mayor. Así podemos decir $\frac{3}{5}$ es menor que $\frac{3}{2}$ y éste es menor que 2, etc.



Pero, ¿podemos decir qué número racional es el siguiente inmediato de 2?, ¿y el anterior inmediato a 1? La respuesta es **No**. Es imposible ordenar todos los números racionales, porque entre cada dos de ellos, por próximos que estén, siempre hay infinitos números racionales.

Sí podemos ordenar un conjunto finito de números racionales.

Ejemplo: Ordenar de mayor a menor los números:

$$\left\{2,\ \frac{7}{5},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{8}{9},\ 3,\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5}\right\}$$

$$3,\ 2,\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{9},\ \frac{4}{7},\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{1}{3}$$

$$3>2>\frac{7}{5}>\frac{8}{9}>\frac{4}{7}>\frac{2}{5}>-\frac{1}{3}>-\frac{2}{5}$$

Esto es posible porque, si tenemos dos números racionales, podemos determinar cuál es el mayor de ellos.

Sean $\frac{6}{11}$ y $\frac{7}{13}$, ¿cuál es mayor?; reducimos a común denominador, esto es, obtenemos fracciones equivalentes a las dadas pero con un denominador común:

$$\frac{6\cdot 13}{11\cdot 13}\ \text{y}\ \frac{7\cdot 11}{11\cdot 13};\quad \frac{78}{143}\ \text{y}\ \frac{77}{143}$$

Ahora se ve claramente cuál es mayor: $\frac{78}{143}=\frac{6}{11}$ luego: $\frac{6}{11}>\frac{7}{13}$

13. Ampliación del concepto de número racional. El número real

13.1. Números irracionales

Hasta ahora hemos visto que toda fracción se puede expresar como número decimal; sin embargo el recíproco no es cierto: no todo número decimal se puede expresar como fracción. Los números decimales que conocemos son los finitos o exactos y los infinitos o periódicos. Existe otro tipo de números decimales que no son exactos ni periódicos, son los números **irracionales,** que pueden definirse como los números decimales infinitos no periódicos.

$\pi = 3{,}141592...$

$e = 2{,}71828...$

$\sqrt{2} = 1.414213...$

$\sqrt[3]{2} = 1{,}25992...$

Con los **números irracionales (I)** se resuelve el problema de la radicación.

Ejemplo:

Hallar la raíz cuadrada de un número significa encontrar el mayor número decimal (expresado en décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, etc.) cuyo cuadrado no sea mayor que el radicando.

Vamos a hallar la $\sqrt{2}$ aplicando la regla anterior mediante tanteo.

a) Calculamos, en primer lugar, la parte entera: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$, por tanto, el 1 es la parte entera ya que el cuadrado de 2 supera a 2.

b) Vemos la aproximación de décimas

   $(1{,}1)^2 = 1{,}21$; $(1{,}2)^2 = 1{,}44$; $(1{,}3)^2 = 1{,}69$; $(1{,}4)^2 = 1{,}96$; $(1{,}5)^2 = 2{,}25$.

   Por tanto la cifra de las decenas ha de ser 4.

c) Aproximación hasta las centésimas

   $(1{,}41)^2 = 1{,}9881$; $(1{,}42)^2 = 2{,}0164$.

   Por tanto la cifra de las centésimas ha de ser 1.

d) Aproximación hasta las milésimas

   $(1{,}411)^2 = 1{,}9909...$; ....; $(1{,}414) = 1{,}9993...$

   $(1{,}415) = 2{,}0022...$.

   Por tanto la cifra de las milésimas ha de ser 4.

e) Si siguiéramos tanteando comprobaríamos que podemos aproximarnos a $\sqrt{2}$ todo lo que queramos.

   La expresión decimal de $\sqrt{2}$ aproximada hasta la diezmillonésima es:

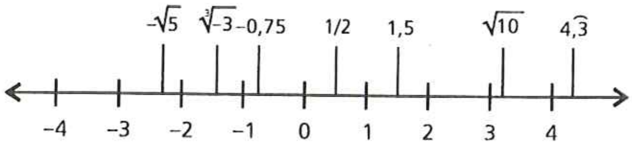
$$\sqrt{2} = 1{,}4142136$$

13.2. El número real

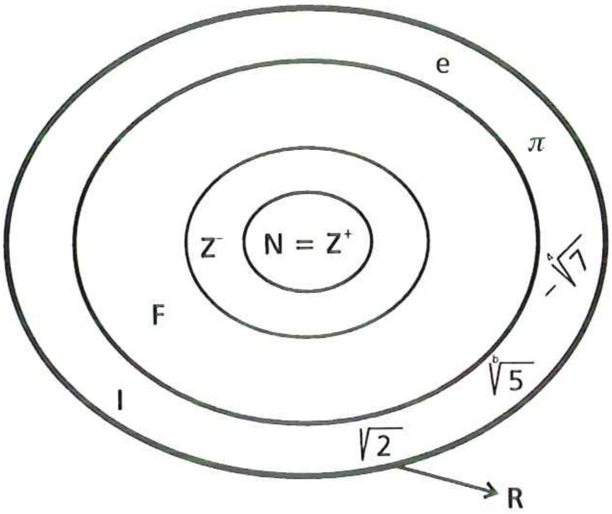
El conjunto de los **números reales (R)** está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales.

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{Q} \cup \mathbf{I}\}$$

Los números reales se representan como puntos en una recta llamada **recta real.**



Todo número real se representa como un único punto de la recta real y recíprocamente todo punto de la recta real representa un único número real.



14. Potencia de base entera y exponente natural

Si **a** es un número entero y **n** un número natural distinto de 0 y 1 se llama potencia de base **a** y exponente **n** al producto de **n** factores iguales todos al número a.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \overset{n}{a}$$

Ejemplo:

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = +16$$
$$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$$

14.1. Signo de una potencia

Si la base es positiva $\longrightarrow$ siempre positiva

Si la base es negativa
- exponente par $\longrightarrow$ positiva
- exponente impar $\longrightarrow$ negativa

15. Operaciones con potencias

15.1. Producto de potencias de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo:

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^5$$

15.2. División de potencias de la misma base

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \textbf{Ejemplo: } \frac{7^5}{7^2} = 7^3$$

15.3. Potencia de potencia

Para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo: $\left[(-2)^3\right]^4 = (-2)^{12} = 2^{12}$

15.4. Potencia de un producto

Para elevar un producto a una potencia se elevan cada uno de los factores a dicha potencia.

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Ejemplo:

$$[(-3) \cdot 2 \cdot (-5)]^3 = (-3)^3 \cdot 2^3 \cdot (-5)^3$$

16. Potencias con exponente cero

Es igual a la unidad:

$$a^n : a^n \begin{cases} a^{n-n} = a^0 \\ \dfrac{a^n}{a^n} = 1 \end{cases} a^0 = 1$$

17. Potencias con exponente negativo

Es igual a la unidad dividida por la misma potencia de exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}; \ \frac{1}{2^{-3}} = 2^3$$

18. Números irracionales. Radicales

18.1 Definición de radical

Llamamos raíz n-ésima de un número real **a**, a otro número **b** (si existe) que elevado a la potencia **n** nos da **a**.

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \begin{array}{l} n \ldots \text{ índice} \\ \sqrt{\ } \ldots \text{ signo radical} \\ a \ldots \text{ radicando} \end{array}$$

19. Relación entre potencias y radicales

a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \qquad \left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$

b) $a^{\left(\frac{n}{p}\right)} = \sqrt[p]{a^n}; \qquad 9^{\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt[4]{9^3}$

20. Raíz cuadrada

Un número natural **b** es la raíz cuadrada de otro número natural **a** si el número **b** elevado al cuadrado da el número **a**.

Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados o también cuadrados perfectos.

21. Propiedad fundamental de los radicales

El valor de un radical no varía si se multiplican o se dividen por un mismo número el exponente y el índice del mismo.

$$\sqrt[p\cdot q]{x^{n\cdot q}} = \sqrt[p]{x^n}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{5b} = \sqrt[4]{(5b)^2} = \sqrt[4]{25b^2}$$
$$\sqrt[3]{3b(x+y)} = \sqrt[6]{3^2\, b^2\, (x+y)^2}$$
$$\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5}$$

21.1. Transformación de radicales

Un radical puede transformarse, de infinitas formas, en otro, multiplicando o dividiendo el exponente y el índice del radicando por un mismo número.

Ejemplo:

$$\sqrt{2x} = \sqrt[4]{4x^2} = \sqrt[8]{16x^4} = \sqrt[24]{4096x^{12}}$$

22. Reducción de radicales a índice común

1º Se halla el m.c.m de los índices, que es el índice común.

2º Se divide el índice común por cada índice y los cocientes resultantes, se multiplican respectivamente por cada exponente de los radicandos.

Ejemplo: Reducir a índice común:

$$\sqrt{2a^2x},\ \sqrt[6]{3(x+y)},\ \sqrt[4]{7a^2z}$$

m.c.m. (2,4,6) = 12

$$\sqrt[12]{2^6\, a^{12}\, x^6},\ \sqrt[12]{3^2\,(x+y)^2},\ \sqrt[12]{7^3\, a^6\, z^3}$$

23. Raíces de un producto y de un cociente

23.1. Raíz de un producto

La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.

$$\sqrt[n]{x\cdot y\cdot z\cdot h} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[n]{z}\cdot\sqrt[n]{h}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{125\cdot 343\cdot 1331} = \sqrt[3]{125}\cdot$ $\cdot\sqrt[3]{343}\cdot\sqrt[3]{1331} = 5\cdot 7\cdot 11 = 385$

23.2. Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

24. Potencia de una raíz y raíz de una potencia

24.1. Potencia de una raíz

Para elevar una raíz a una potencia, se eleva el radicando a esa potencia.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$$

24.2. Raíz de una potencia

Para hallar la raíz de una potencia se obtiene la raíz de la base y se eleva el resultado a la potencia dada.

Ejemplo:

$$\sqrt{25^3} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$$

25. Raíz de una raíz

La raíz m-ésima de la raíz n-ésima de un número es igual a la raíz mn-ésima de dicho número.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

26. Extracción de raíces de índice compuesto

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{2401} = \sqrt{\sqrt{2401}} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

27. Extracción de factores de un radical

Es necesario que el índice sea igual o menor que el exponente del factor. Se divide el exponente entre el índice y el cociente sale como exponente de dicho factor fuera de la raíz y el resto queda como exponente dentro de la raíz. Si los factores son números hay que descomponerlos previamente en factores primos.

Ejemplos:

$$\sqrt{31104} = \sqrt{2^7 \cdot 3^5} = 2^3 \cdot 3^3 \sqrt{2 \cdot 3} = 72\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{49x^9(a+b)^3} = x^3(a+b)\sqrt[3]{7^2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{xy^5z^6}{z^4h^6}} = \frac{y \cdot z}{h}\sqrt[5]{\frac{x \cdot z}{z^4 \cdot h}}$$

28. Introducción de factores en un radical

Para introducir factores dentro de una raíz hay que elevar dichos factores al índice de la raíz.

Ejemplos:

$$2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$3x^2 a\sqrt[3]{2ac} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2x^6 \cdot a^3 \cdot ac} =$$

$$= \sqrt[3]{54 \cdot x^6 \cdot a^4 \cdot c}$$

29. Radicales semejantes

Son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Pueden diferir únicamente en el coeficiente.

Ejemplos:

1) $3a\sqrt{x^2}$, $\quad 2b\sqrt{x^2}$, $\quad 4a^2\sqrt{x^2}$

2) $\sqrt{x-1}$, $\quad \sqrt{9a^2(x-1)}$, $\quad \sqrt{49x^4(x-1)}$,

$\sqrt{x-1}$, $\quad 3a\sqrt{x-1}$, $\quad 7x^2\sqrt{x-1}$

30. Operaciones con radicales

30.1. Suma y resta de radicales

Para poder sumar o restar radicales es necesario que sean semejantes. Para proceder a la suma se saca el radical como factor común de la suma algebraica de los coeficientes.

Ejemplos:

1) $2\sqrt[4]{x^3} + 4\sqrt[4]{x^3} + 5\sqrt[4]{x^3} =$

$= (2+4+5)\sqrt[4]{x^3} = 11\sqrt[4]{x^3}$

2) $7\sqrt{2a} - 5\sqrt{2a} + 6\sqrt{2a} =$

$= (7-5+6)\sqrt{2a} = 8\sqrt{2a}$

3) $4\sqrt[3]{81a^3x} + 2\sqrt[3]{192x} + \sqrt[6]{9x^2} =$

$= 4 \cdot 3a\sqrt[3]{3x} + 2 \cdot 4\sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{3x} =$

$= 12a\sqrt[3]{3x} + 8\sqrt[3]{3x} = (12a+8+1)+$

$+\sqrt[3]{3x} = (12a+9)\sqrt[3]{3x}$

30.2. Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar o dividir varios radicales cuando tienen el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos y se le coloca al resultado de la raíz el mismo índice.

Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen previamente al índice común.

Ejemplos:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6$

2) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[15]{7} = \sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{4^3} \cdot \sqrt[15]{7} =$

$= \sqrt[15]{2^5 \cdot 4^3 \cdot 7} = \sqrt[15]{2^{11} \cdot 7}$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[12]{3^3}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^4}{3^3}}$

31. Racionalización de denominadores

Esta operación consiste en eliminar raíces de un denominador, convirtiéndolo en un número entero. Hay varios casos:

a) El denominador es un monomio, en el que aparece una raíz cuadrada. Se multiplican el numerador y el denominador por la raíz que aparece en el denominador. Es conveniente simplificar antes los radicales, cuando haya lugar. Ejemplos:

1) $$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

2) $$\frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{7^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

b) El denominador es una raíz de índice cualquiera **m** o bien el radicando es una potencia. Se resuelve, en general, así:

$$\frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n}\cdot\sqrt[m]{b^{m-n}}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n\cdot b^{m-n}}} =$$

$$= \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a\sqrt[m]{b^{m-n}}}{b}$$

Ejemplos:

1) $$\frac{5}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{6^2}} = \frac{5\sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{5\sqrt[3]{6^2}}{6}$$

2) $$\frac{7}{\sqrt[5]{5^2}} = \frac{7\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^2}\cdot\sqrt[5]{5^3}} = \frac{7\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^5}} =$$

$$= \frac{7\sqrt[5]{5^3}}{5}$$

c) El denominador es un binomio. Se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador, el cual se obtiene cambiando de signo el segundo de los términos. Así, el conjugado de a + b es a – – b, y el de a – b es a + b.

Ejemplos:

1) $$\frac{a}{\sqrt{b}-2} = \frac{a\left(\sqrt{b}+2\right)}{\left(\sqrt{b}-2\right)\left(\sqrt{b}+2\right)} =$$

$$= \frac{a\left(\sqrt{b}+2\right)}{\sqrt{b^2}-2^2} = \frac{a\left(\sqrt{b}+2\right)}{b-4}$$

2) $$\frac{3}{2+\sqrt{5}} = \frac{3\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{3\left(2-\sqrt{5}\right)}{4-\sqrt{5^2}} = \frac{3\left(2-\sqrt{5}\right)}{4-5} =$$

$$= \frac{3\left(2-\sqrt{5}\right)}{-1} = -3\left(2-\sqrt{5}\right)$$

32. Valor absoluto y sus propiedades

El valor absoluto de un número real x, se representa por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$|3| = 3$; $|-4| = -(-4)$; $|0| = 0$

32.1 Propiedades

1. Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.

$|x| = |-x|$

2. El valor absoluto del producto de dos números reales es igual al producto de sus valores absolutos:

   $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3. El valor absoluto del cociente de dos números reales (con denominador $\neq 0$) es igual al cociente de los valores absolutos:

   $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

4. El valor absoluto de la suma de dos números reales es menor o igual que la suma de los valores absolutos:

   $|x + y| \leq |x| + |y|$

   Ejemplos:

   $|5 + 7| = |5| + |7|$

   $|5 + (-7)| < |5| + |-7|$

5. El valor absoluto de la diferencia de dos números reales es mayor o igual que la diferencia de sus valores absolutos:

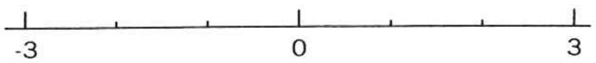
   $|x - y| \geq |x| - |y|$

   Ejemplos:

   $|5 - 3| = |5| - |3|$

   $|5 - (-3)| > |5| - |3|$

El valor absoluto de un número expresa su distancia al cero:



$|3| = |-3| = 3$

El valor absoluto de los números expresa la distancia entre ellos:

$d(a,b) = |a - b| = |b - a|$

Ejemplos:

$d(7,4) = |7 - 4| = |3| = 3$

$d(3,5) = |3 - 5| = |-2| = 2$

$d(-5,2) = |-5 - 2| = |-7| = 7$

33. Intervalos y semirrectas

33.1 Intervalos de extremo a y b

Un intervalo es un segmento (un conjunto de puntos) de la recta real que tiene por extremos dichos puntos. Los intervalos pueden ser de cuatro tipos dependiendo de que se incluyan o no sus extremos:

1. **Intervalo cerrado:** Cuando contiene sus extremos. Se representa por $[a,b]$

$[a,b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$

2. **Intervalo abierto:** Cuando no contiene sus extremos. Se representa por (a,b)

$(a,b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$

3. **Intervalo semiabierto por la izquierda:** Cuando no contiene el extremo de la izquierda. Se representa por $(a,b]$

$(a,b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$

4. **Intervalo semiabierto por la derecha:** Cuando no contiene el extremo de la derecha. Se representa por $[a,b)$

$$[a,b) = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$$

La longitud de un intervalo es la diferencia entre sus extremos

Ejemplos:

$[2,7] \Rightarrow$ longitud $[2,5] = 5$

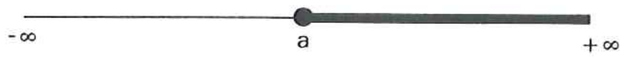
$(3,9) \Rightarrow$ longitud $(3,9) = 6$

33.2 Semirrectas

Una semirrecta es un intervalo que tiene un solo extremo y se extiende indefinidamente a lo largo de la recta real, en sentido contrario.

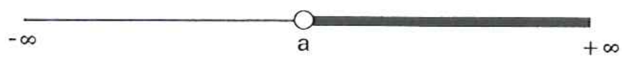
Las semirrectas pueden ser de cuatro tipos:

1. **Semirrecta derecha y cerrada:**



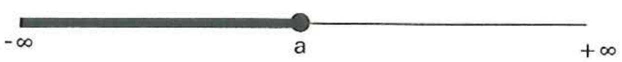
$$[a,+\infty) = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$$

2. **Semirrecta derecha y abierta:**



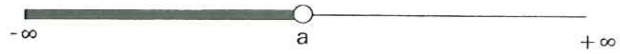
$$(a,-\infty) = \{x \in R \,/\, x > a\}$$

3. **Semirrecta izquierda y cerrada:**



$$(-\infty,a] = \{x \in R \,/\, x \leq a\}$$

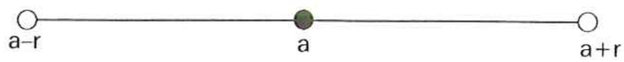
4. **Semirrecta izquierda y abierta:**



$$(-\infty,a) = \{x \in R \,/\, x < a\}$$

33.3 Entornos

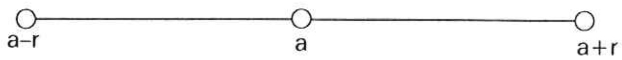
Una forma específica de expresar los intervalos es dar su centro a y su radio r (la mitad de su longitud). Se suelen simbolizar por $(a-r,\ a+r) = \{x \in R \,/\, a-r < x < a+r\}$



Se llaman *entornos* a los intervalos abiertos de cada uno de los puntos que contienen. Pueden expresarse utilizando el valor absoluto: $\{x \in R / a-r < x < a+r\} = |x-a| < r$.

Si a = 0, el intervalo tiene como centro el origen: $\{x \in R \,/\, -r < x < r\} = |x| < r$

Se llama *entorno reducido* de centro a y radio r a los entornos que no contienen el centro a: $\{x \in R \,/\, a-r < x < a+r, x \neq a\}$

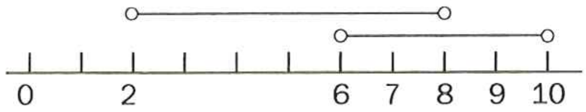


33.4 Operaciones con intervalos

Las opreraciones más importantes que se pueden realizar con intervalos son la unión y la intersección.

La *unión* de dos intervalos (a,b) y (c,d) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno **o** a otro intervalo

$$(a,b) \cup (c,d)$$



Ejemplo:

$(2, 8) \cup (6, 10) = (2, 10)$

La unión de intervalos no es siempre un intervalo:

Ejemplo:

$(-3, 5) \cup (7, 10)$

La intersección de dos intervalos (a,b) y (c,d) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a uno **y** otro intervalo: $(a,b) \cap (c,d)$

Ejemplo:

$(2, 8) \cap (6, 10) = (6, 8)$

La intersección de intervalos siempre es un intervalo. Cuando los intervalos no tienen elementos comunes su intersección es el conjunto vacío (ø).

Ejemplo:

$(-3, 5) \cap (7, 10) = \emptyset$

34. Logaritmos

Ya vimos anteriormente, cuando estudiamos las potencias, cómo proceder para elevar un número a otro. Los logaritmos resuelven el problema contrario: dados dos números, ¿qué potencia del primero es igual al segundo?

Ejemplo:

¿A qué número hay elevar 10 para obtener 10000?

Como $10^4 = 10000$, el resultado es 4.

4 es el logaritmo de 10000 en base 10 y lo simbolizamos: $\log_{10} 10000 = 4$

Llamamos *logaritmo en base a de x*, al número y al que hay que elevar *a* para obtener *x*.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x, a > 0,\ a \neq 1;\ x > 0$$

"El logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número".

Los logaritmos en *base diez* se llaman *decimales* y se simbolizan por log sin escribir la base.

Ejemplos:

$\log 1000 = 3$; $\log 10 = 1$

Los logaritmos que tiene **de base el número e** se llaman *logaritmos neperianos* y se simbolizan por ln o L.

Utilizando en la calculadora las teclas log y ln, se obtienen, respectivamente, los logaritmos decimales y neperianos.

Ejemplos:

1. Hallar utilizando la calculadora log 12.

   Se pulsa 12 y a continuación log: $\log 12 = 1{,}0791812$.

2. Hallar utilizando la calculadora ln 12:

   Se pulsa 12 y a continuación ln:

   $\ln 12 = 2{,}4849066$.

34.1. Propiedades de los logaritmos. Cambio de base

1. El logaritmo, en cualquier base, de uno es igual a 0.

   $\log_a 1 = 0$

2. El logaritmo de la base es 1.

   $\log_a a = 1$

3. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

   $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

4.. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

   $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

5. El logartimo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

   $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

6. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice de la raíz.

   $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x = \frac{\log_a x}{n}$

Ejemplos:

1. $\log_3 1 = 0$; ya que $3^0 = 1$

2 $\log_5 5 = 1$; ya que $5^1 = 5$

3. Sabiendo que $\log 5 = 0{,}69897$, hallar $\log(10 \cdot 5)$.

   $\log(10 \cdot 5) = \log 10 + \log 5 =$

   $= 1 + 0{,}69897 = 1{,}69897$

4. Hallar $\log\left(\frac{10}{5}\right)$

   $\log\left(\frac{10}{5}\right) = \log 10 - \log 5 =$

   $= 1 - 0{,}69897 = 0{,}30103$

5. Hallar $\log 5^{10}$

   $\log 5^{10} = 10 \log 5 =$

   $= 10 \cdot 0{,}69897 = 6{,}9897$

6. Hallar $\log \sqrt{10}$.

   $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{\log 10}{2} =$

   $= \frac{1}{2} = 0{,}5$

Cambio de base

Para expresar la relación entre los logaritmos de un número en distintas bases se utiliza la fórmula del cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

Calcular $\log_6 47$, utiliando la calculadora.

Normalmente, con la calculadora no se obtienen directamente los logaritmos en base distinta a 10 o e. Utilizaremos, por tanto, la fórmula del cambio de base:

$$\log_6 47 = \frac{\log 47}{\log 6} = 2{,}1488083$$

OPERACIONES COMBINADAS

NOMBRE: ______________________________ **FECHA:** __________.

El orden en que hay que hacer las operaciones es el siguiente:

1º Paréntesis.
2º Multiplicaciones y divisiones.
3º Sumas y restas.

1. Calcula las siguientes operaciones combinadas de números naturales:
   a) $5 + 3 - 2 \cdot 2 =$
   b) $3 + 5 \cdot (7 - 3) =$
   c) $4 + 2 \cdot [3 + 2 - (4 - 1)] =$
   d) $2 \cdot (15 - 2) - [11 - (7 - 3)] =$
   e) $(8 - 4) : 2 - 1 =$
   f) $2 - 3 \cdot (7 - 4) + 8 =$
   g) $4 \cdot 14 - 120 : 12 =$
   h) $3 \cdot 12 + 14 : 7 =$
   i) $15 : (11 - 8) + 35 : (25 - 18) =$
   j) $5 + 4 \cdot 5 =$
   k) $3 \cdot 15 - 45 =$
   l) $3 \cdot (12 + 14) =$
   m) $3 \cdot 12 + 14 =$
   n) $5 \cdot (12 - 9) + 3 \cdot (19 - 16) =$
   o) $45 : 5 - 45 : 9 =$
   p) $20 : (16 - 12) =$
   q) $5 \cdot (17 - 12) =$
   r) $2 + 45 : [3 \cdot (17 - 12)] =$
   s) $80 + (40 - 3) =$
   t) $17 - [29 - (4 + 13) + 2] =$
   u) $2\,[18 + 3\,(13 - 9) - 5] =$
   v) $10 - [6 - (5 - 4) - 2] + 1 =$
   w) $4^2 : 8 + [9 - 6] =$
   x) $9 : 3 + [(28 - 10) - (9 - 2)] =$
   y) $[4 \cdot 2 + 20] : 4 + 2 \cdot (9 : 3) =$
   z) $7 \cdot 4 : 14 - 3\,[10 - 2\,(8 - 3)] =$
   aa) $2 - [8 - (-3 + 6) - 5] =$
   bb) $10 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1 =$

2. Calcula el valor de las siguientes operaciones combinadas con potencias:
   a) $3^2\,(15 + 5)^2 + 2^3\,(15 - 5)^4 =$
   b) $5\,(4 - 2)^2 + 1^2\,(2^3 - 5)^2 =$
   c) $560 - 2^2\,(34 - 24)^2 =$
   d) $532 + 2\,(4^3 - 4^2)^2 =$
   e) $2\,(3^2 - 3)^2 + 2^2\,(5^2 - 5)^2 =$
   f) $(8 - 5)^3 + 2\,(4^2 - 13) + 7\,(6^2 - 30)$
   g) $720 + 3^2\,(20 - 15) =$
   h) $3^3 - 2^2 + 4\,(7 - 2)^2 =$
   i) $(10 - 3)^2 + 2\,[6 + 5\,(3^2 - 2)^2] =$

j) $[(2-1)^3+2]\ [2^2+(3^2)^2] =$
k) $4^2 : (-8) - [9 - (-6)] =$

OPERACIONES COMBINADAS DE NUMEROS ENTEROS

3. Calcula las siguientes operaciones combinadas con números enteros:
   a) $-12 + (-64) + (-17) + 4 =$
   b) $25 - 50 - 56 + 50 - 25 + 56 =$
   c) $3 \cdot [-3 + (-3)] - 14 : (-7) =$
   d) $2 \cdot [3 + (-2) \cdot 5] + (-2)\cdot(-5)\cdot(-3) =$
   e) $-6 - 5 \cdot [5\ (-2) - 5] + (-5) \cdot 4 =$
   f) $-9 : 3 - [\ (8 - 10) - (9 - 2)] =$
   g) $[(-4)\ 2 + 20\ ] : (-4) + 2\ \ (9 : (-3)) =$
   h) $(-35) : (-5) - 3 \cdot (5 - 7) =$
   i) $[(-4) : (+2)] - [(+7) - (-2)] =$
   j) $[(+3) - (+5) + (+4)] : [(+15) : (-3) - (-7)] =$
   k) $-13 \cdot (+3) - (-12) \cdot (+7) =$
   l) $[(-25) + 5 - (-2)] : (-8) =$
   m) $-8 \cdot [\ 5 - (-2\ )] - 48 : [6 + (-14)] =$
   n) $-11 \cdot [10 + (-7)] + 36 : [(-1) - (-10)] =$
   o) $42 : [(-6) - (-3)] + 28 : [-6 - (-8)] =$

Hoja nº1

NUMEROS ENTEROS: Operaciones combinadas

1. Quita paréntesis:

a) $+(-5)$ d) $-(-4)$ g) $-(+6)$
b) $-(+8)$ e) $+(+12)$ h) $+(-7)$
c) $-[-(-3)]$ f) $-[+(-15)]$ i) $-[-(+7)]$

2. Calcula:

a) $12-8+4-9-3+10$
b) $5-9-7+4-6+8$
c) $-1-3+5-8-4-3+2$
d) $-6-9+4+12-15+21$
e) $(-5)-(-5)-(+5)$
f) $(-12)+(+6)-(-7)$
g) $(+6)+(-2)-(+5)-(-7)$
h) $(+18)-(-11)-(+10)+(-14)$
i) $(-8)-(-1)-(+3)+(-5)+(+9)$
j) $(+2)-(+12)+(-11)-(-15)-(-5)$

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) $10-(8+4)$
b) $6-(3-12)$
c) $(5+7)-(2-8)$
d) $18+(3-5+2-8)$
e) $15-(8-2-6+1)$
f) $(5-3+2)-(10-5-3+1)$
g) $(4-6)-[(-2)+(-7)]$
h) $(-9)+[(-4)-(-2)+(-3)]$
i) $(+12)-[(+2)+(-7)-(+14)]$
j) $[(-12)-(-20)]-[(+6)+(5-9)-(16-8-11)]$

4. Calcula:

a) $20+5\cdot(6-9)$
b) $18-3\cdot(4+2)$
c) $4\cdot(2-6)-5\cdot(3-7)$
d) $150:(7-12)$
e) $(35-15):(5-8)$
f) $(6-2-10):(5-11)$
g) $(-2)\cdot(+7)+(+5)\cdot(+6)$
h) $(+4)\cdot(-20)-(+2)\cdot(-40)$
i) $(+5)\cdot(+10)-(+4)\cdot(-20)$
j) $(+5)\cdot[(-3)+(+7)]$

5. Calcula:

a) $(-2)\cdot[8-(+4)-(-10)]$
b) $[(-6)-(-3)]\cdot[(+5)-(-2)]$
c) $(-5)\cdot[(-5)+(+2)-(4+6-1)]$
d) $(-3)\cdot(+2)-[(-5)+(-7)-(-1)]\cdot(-3)$
e) $3\cdot[(+4)+(-6)]-(-2)\cdot[8-(+4)]$
f) $6+(3-5+4)\cdot 2-3\cdot(6-9+8)$
g) $6\cdot 4-5\cdot 6-2\cdot 3$
h) $15-6\cdot 3+2\cdot 5-4\cdot 3$
i) $(+4)\cdot(1-9+2):(-3)$
j) $(-12-10):(-2-6-3)$

6. Opera estas expresiones:

a) $3-[(5-8)-(3-6)]$
b) $1-(3-[4-(1-3)])$
c) $(2+7)-(5-[6-(10-4)])$
d) $13-[8-(6-3)-4\cdot 3]:(-7)$
e) $5\cdot(8-3)-4\cdot(2-7)-5\cdot(1-6)$
f) $12\cdot(12-14)-8\cdot(16-11)-4\cdot(5-17)$
g) $18-40:(5+4-1)-36:12$
h) $4+36:9-50:[12+(17-4)]$
i) $48:[5\cdot 3-2\cdot(6-10)-17]$
j) $3\cdot 4-15:[12+4\cdot(2-7)+5]$

7. Efectúa:

a) $2^3-4^2:8+3$
b) $6^2:4-1^3-4^2:2-3^2$
c) $2\cdot 3^2-4^2:2+3^2-1^4$
d) $3\cdot 41-4^2-5+1-2^3$
e) $20+[3\cdot 4-(17-3\cdot 2^2)]\cdot 2$
f) $10+8\cdot 3^2-5\cdot(27-2^3\cdot 3)$
g) $18-[2\cdot(8-(29-3\cdot 2^3))-4]$

8. Calcula:

a) $(-3)^2-(-2)^2+(-4)^3:2^2$ d) $5^2+(-3)^2+2\cdot(-2)^3$
b) $20-3\cdot(-4)^3+6\cdot(-2)^2$ e) $-2\cdot 2^3+3\cdot(-3)^3$
c) $(-3)^2-6\cdot 2^2+(-3)^3:(2-3)$ f) $12-(2^2-10^2:5)+(-6)^2:4$

Números racionales. Ejercicios y problemas

1 Pasar a fracción:

$0.0051, \quad 0.\widehat{0051}, \quad 0.005\hat{1},$

2 Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

k) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} =$

l) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3\right\}^{-4} =$

m) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

3 Opera:

$$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^2\right] : \left[\left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\right] = \boxed{-4}$$

4 Efectúa

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} =$$

5 Calcula qué fracción de la unidad representa:

1 La mitad de la mitad.

2 La mitad de la tercera parte.

3 La tercera parte de la mitad.

4 La mitad de la cuarta parte.

6 Elena va de compras con 180 €. Se gasta 3/5 de esa cantidad.¿Cuánto le queda?

7 Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil A lleva recorridos los 5/11 del trayecto cuando el B ha recorrido los 8/13 del mismo. ¿Cuál de los dos va primero? ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?

8 Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los 2/3 de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?

9 En las elecciones locales celebradas en un pueblo, 3/11 de los votos fueron para el partido A, 5/10 para el partido B, 5/14 para C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15 400. Calcular:

1 El número de votos obtenidos por cada partido.

2 El número de abstenciones sabiendo que el número de votantes representa 5/8 del censo electoral.

10 Un padre reparte entre sus hijos 1 800 €. Al mayor le da 4/9 de esa cantidad, al mediano 1/3 y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?