# 1. Proporcionalidad directa e inversa

## 1.1. Razón y proporción

No se debe confundir razón con fracción. En la fracción sólo se pueden utilizar números enteros, mientras que en la razón se pueden usar números decimales.

Se llama **razón** de dos números al cociente indicado de dichos números.

Por ejemplo, la razón de 1 y 10; 3,5 y 9; 7 y 0,4; 1,6 y 5,8… sería: $\frac{1}{10}$; $\frac{3,5}{9}$; $\frac{7}{0,4}$; $\frac{1,6}{5,8}$, etc.

Los términos de una razón $\frac{a}{b}$ se conocen como el **antecedente,** el numerador «$a$», y el **consecuente,** el denominador «$b$».

En toda proporción la división del antecedente entre el consecuente nos da un valor fijo llamado **constante de proporcionalidad:**

$$\frac{5}{2}=\frac{3,75}{1,5}=2,5$$

Si dos razones constituyen una igualdad dan lugar a una **proporción.** En toda proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ los términos $a$ y $d$ se denominan **extremos,** mientras que $b$ y $c$ se conocen como **medios.**

Una proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se lee: «$a$ es a $b$, como $c$ es a $d$».

### Propiedades

a) En toda proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot d$$

b) En una proporción, siempre, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones:

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

**Ejemplo**

Si la proporción es: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ comprobemos las propiedades anteriores.

a) $a\cdot d=b\cdot c$ es decir: $1\cdot 6=2\cdot 3$; $6=6$

b) $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ es decir: $\frac{1+3}{2+6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$

1. Averigua el término que falta para que formen proporción:

   A) $\frac{3}{5}=\frac{x}{10}$ B) $\frac{3,5}{2}=\frac{5,25}{x}$ C) $\frac{x}{5}$ y $\frac{1,65}{3}$

2. Forma razones con la suma de antecedentes y consecuentes de las siguientes proporciones y comprueba que forman proporción con ellas:

   A) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ B) $\frac{4}{5}=\frac{6}{7,5}$ C) $\frac{3}{7}=\frac{4,5}{10,5}$

## 1.2. Proporcionalidad directa

Una **magnitud** es cualquier propiedad física que puede ser medida. Por ejemplo, la longitud, la masa, el tiempo, etc.

Se dice que dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al aumentar o disminuir una, lo hace la otra de la misma forma.

Ejemplo

Si el kg de naranjas está a 1,8 euros, me costará el doble si compro 2 kg, el triple si compro 3 kg, y así sucesivamente. Ambas magnitudes (cantidad y precio) aumentan de la misma forma.

| Cantidad (kg) | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|
| Precio (euros) | 1,8 | 3,6 | 5,4 | ... |

Observa que las razones entre estas magnitudes (peso y precio) forman una proporción; es decir:

$$\frac{1}{1,8}=\frac{2}{3,6}=\frac{3}{5,4}$$

Siempre que esto sucede, se puede hablar de proporcionalidad directa.

| kg | 3 | 7 |
|---|---|---|
| Euros | 5,4 | $x$ |

En magnitudes directamente proporcionales, el **cociente** entre ellas siempre es constante; por tanto:

$$\frac{3}{5,4}=\frac{7}{x}\Rightarrow 3\cdot x=5,4\cdot 7$$

$$x=\frac{5,4\cdot 7}{3}=12,6 \text{ euros}$$

3. Escribe tres pares de magnitudes que sean directamente proporcionales.
4. Si un metro de tela cuesta 6,5 euros:
   A) ¿Cuánto me costarán 3 m?
   B) ¿Qué longitud podré comprar con 50 euros?
5. Si en una oferta del supermercado dan 3 kg de manzanas por 2 euros:
   A) ¿Cuánto costarán 5 kg?
   B) ¿Cuántos kg podré comprar con 5 euros?
6. Un tren ha recorrido 49 km en 20 minutos.
   A) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los siguientes 100 km?
   B) ¿Cuántos km llevará recorridos después de otros 5 minutos?
7. Si un coche gasta 6 litros de gasoil en 100 km:
   A) ¿Cuánto gastará en un viaje de 470 km?
   B) ¿Cuántos km podrá hacer con el depósito lleno con 70 litros?

## 1.3. Proporcionalidad inversa

Hay casos como puede ser una construcción en la que si un obrero tarda 30 días en realizar un trabajo, dos obreros tardarán la mitad (15 días), tres obreros tardarán la tercera parte (10 días) y así sucesivamente; es decir, al aumentar o disminuir una magnitud, la otra lo hace a la inversa, disminuye o aumenta. En estos casos se dice que tales magnitudes son **inversamente proporcionales.**

| Obreros | 1 | 2 | 3 | ... |
|---|---|---|---|---|
| Días | 30 | 15 | 10 | ... |

En este caso se observa que se cumple que el producto entre magnitudes es constante: $1\cdot 30=2\cdot 15=3\cdot 10$; por lo tanto, si se quiere saber cuánto tardarán en hacer dicha obra 5 obreros, bastará con calcular qué número multiplicado por 5 da como producto 30, que no puede ser otro que el 6; siendo ése el resultado buscado.

| Obreros | 3 | 6 |
|---|---|---|
| Días | 10 | $x$ |

En magnitudes inversamente proporcionales, el **producto** entre ellas es siempre constante; por tanto:

$$3\cdot 10=6\cdot x$$

$$x=\frac{3\cdot 10}{6}=5 \text{ días}$$

8. Escribe tres parejas de magnitudes inversamente proporcionales.
9. Cinco agricultores recogen una cosecha en 14 días.
   A) ¿Cuánto tardarán en recogerla 8 agricultores?
   B) ¿Cuántos tienen que trabajar para recogerla en 7 días?

10. Un tren ha hecho un recorrido en 3 horas a una velocidad de 60 km/h.
    A) ¿Cuánto tardará si disminuye a 50 km/h?
    B) ¿A qué velocidad tendrá que ponerlo para tardar sólo 2 horas?

11. Un rectángulo tiene 22 cm de base y 15 cm de altura. Si queremos construir otro rectángulo de la misma área pero con 10 cm de base, ¿cuánto debe tener de altura?

12. Completa la tabla para que las magnitudes A y B sean inversamente proporcionales:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A | 0,875 | | 7 | 1,75 |
| B | | 0,7 | 0,5 | |

## 2. Porcentajes. Aplicación

Es frecuente oír que tal o cual artículo tiene una rebaja del 30 por ciento o que el IVA aplicable a una factura es 18 por ciento. Ambas expresiones definen el **porcentaje,** es decir, el número de partes referidas de las cien iguales en que se puede dividir una cantidad (en estos casos el precio del artículo o el importe de la factura), que constituye la rebaja ofertada o el sobrecoste que se habrá de pagar por el IVA. El signo del tanto por ciento es %.

Matemáticamente hablando, un porcentaje no es otra cosa que una razón cuyo consecuente es 100, por ejemplo:

$$1\% = \frac{1}{100} \qquad 3{,}7\% = \frac{3{,}7}{100} \qquad 13\% = \frac{13}{100}$$

Al ser una división entre 100 podemos, fácilmente, pasar esa razón a número decimal:

$$1\% = 0{,}01 \qquad 3{,}7\% = 0{,}037 \qquad 13\% = 0{,}13$$

**¡Recuerda!**

Al utilizar proporciones, lo verdaderamente importante es que guardes el orden en las razones. Por ejemplo, si en la primera razón has puesto:

$$\frac{\text{Porcentaje}}{\text{Cantidad}}$$

en la siguiente razón debes poner también:

$$\frac{\text{Porcentaje}}{\text{Cantidad}}$$

y no al revés. Fíjate en los ejemplos.

Ejemplo

1. Calcula el 30% de 400 euros:

**1ª forma: por proporciones**

$$\frac{100}{400} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{400 \cdot 30}{100} = 120 \text{ euros}$$

**2ª forma: con decimales**

30% = 0,30; entonces

0,30 · 400 = 120 euros

**El 30% de 400 euros son 120 euros**

Siempre que esto sucede, se puede hablar de la proporcionalidad directa.

2. Calcula el número de estudiantes de una clase sabiendo que en junio aprobaron todas las materias 44, y éstos representan el 80% de la clase.

**1ª forma: por proporciones**

$$\frac{80}{44} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{44 \cdot 100}{80} = 55$$

**2ª forma: con decimales**

80% = 0,80; entonces

44 : 0,80 = 55 estudiantes

**El número de estudiantes de la clase es 55**

3. Calcula el porcentaje que representan los 6 estudiantes con ojos azules en una clase de 24:

**1ª forma: por proporciones**

$$\frac{100}{24} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 100}{24} = 25\%$$

**2ª forma: con decimales**

6 : 24 = 0,25 = 25%

**Los de ojos azules representan el 25% de la clase**

1. Calcula:
   A) 28% de 560 B) 30% de 110 C) 3,4% de 244 D) 12,5% de 600
2. En una oficina con 50 personas, el 32% son hombres. Calcula el número de hombres y mujeres.
3. En una fábrica, 560 personas cobran menos de 1.000 euros, representando el 80% de la plantilla. ¿Cuántos trabajan en total en la fábrica? ¿Cuántos cobran más de 1.000 euros?

## 2.1. Descuentos porcentuales

En rebajas, generalmente, se anuncia el porcentaje de descuento que se aplica al artículo; es decir, la cantidad que no se paga. ¿Cómo calcular, entonces, el precio a pagar? Como se ha visto en el epígrafe anterior estos cálculos pueden realizarse de dos formas: mediante proporciones u operando con números decimales.

Ejemplo

1. Una camisa tiene un precio de 25 euros con una rebaja del 20%. ¿Cuánto pagaremos por ella?

   Una forma de solucionar el problema será calcular cuánto es el 20% de 25 y luego restarle esa cantidad a 25; pero será más rápido razonando de la siguiente forma: como el descuento es el 20%, quiere decir que voy a pagar el 80% (100% – 20% = 80%). Entonces:

   **1ª forma: por proporciones**

   $$\frac{100}{25} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 80}{100} = 20 \text{ euros}$$

   **2ª forma: con decimales**

   $80\% = 0{,}8$ por tanto

   $0{,}8 \cdot 25 = 20$ euros

   **Por la camisa pagaremos 20 euros**

2. Por un televisor rebajado un 30% he pagado 665 euros, ¿cuál era su precio inicial antes de la rebaja?

   El razonamiento en este caso es: si la rebaja es el 30%, pago el 70% (100% – 30% = 70%)

   **1ª forma: por proporciones**

   $$\frac{70}{665} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{665 \cdot 100}{70} = 950 \text{ euros}$$

   **2ª forma: con decimales**

   $70\% = 0{,}7$ por tanto

   $665 : 0{,}7 = 950$ euros

   **El precio inicial del televisor, antes de la rebaja, era 950 euros**

## 2.2. Aumentos porcentuales

Aquí se presenta el caso contrario al estudiado en el punto anterior.

Ejemplo

1. Un fontanero cobra por cambiar un grifo 125 euros, pero al hacer la factura ha de incluir el IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido) que es un 18%. ¿Cuánto tendremos que pagar en total?

   Razonamiento: si se añade el 18%, entonces vamos a pagar el 118% en total:

   $$100\% + 18\% = 118\%$$

   **1ª forma: por proporciones**

   $$\frac{100}{125} = \frac{118}{x} \Rightarrow x = \frac{125 \cdot 118}{100} = 147{,}5 \text{ euros}$$

   **2ª forma: con decimales**

   $118\% = 1{,}18$ entonces

   $1{,}18 \cdot 125 = 147{,}5$ euros

   **El importe a pagar por la factura será 147,5 euros**

2. En un hotel han cargado un IVA del 7%, resultando el precio final 97 euros. ¿Cuál era el precio antes sin impuestos?

   Razonamiento: si nos han cargado el 7%, vamos a pagar el 107% del precio de la habitación, luego:

   **1ª forma: por proporciones**

   $$\frac{107}{97} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{97 \cdot 100}{107} = 90{,}65 \text{ euros}$$

   **2ª forma: con decimales**

   $107\% = 1{,}07$ entonces

   $97 : 1{,}07 = 90{,}65$ euros

   **El precio de la habitación, antes de impuestos, es 90,65 euros**

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Para resolver un problema de proporcionalidad compuesta debes seguir los siguientes pasos:

1º.- Plantea la regla de tres. Expresa las cantidades de la misma magnitud en la misma unidad.

2º.- Compara cada magnitud con la que lleva la x para ver si la proporcionalidad entre ellas es directa o inversa. Escribe D debajo de las directas e I debajo de las inversas.

3º.- Si hay alguna proporcionalidad inversa vuelve a plantear la regla de tres invirtiendo las cantidades en las que sean inversas.

4º.- Escribe una proporción de la siguiente forma: la primera razón con las cantidades de la magnitud donde está la x , la segunda razón con el producto de las cantidades de las demás magnitudes.

Fíjate en el siguiente ejemplo.

Un taller, trabajando 8 horas diarias, ha necesitado 5 días para fabricar 1 000 piezas. ¿Cuántos días tardará en hacer 3 000 piezas trabajando 10 horas diarias?

| Nºpiezas | | Horas día | | Días |
|---|---|---|---|---|
| 1000 | —— | 8 | —— | 5 |
| 3000 | —— | 10 | —— | x |
| D | | I | | |

*(A doble de piezas, doble de días necesarios)*
*(A doble de horas diarias, mitad de días necesarios)*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1000 | —— | 10 | —— | 5 |
| 3000 | —— | 8 | —— | x |

$$\frac{5}{x} = \frac{1000\,.\,10}{3000\,.\,8} \qquad x = \frac{5\,.\,3000\,.\,8}{1000\,.\,10} = 12$$

**Tardará 12 días**

# EJERCICIOS DE PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

1) Si en una oferta del supermercado dan 3 kg de manzanas por 2 € :
   a) ¿Cuánto costaran 5 kg?
   b) ¿Cuántos kg podré comprar con 5 €?

2) Si un coche gasta 6 litros de gasoil en 100 km :
   a) ¿Cuánto gastará en un viaje de 470 km?
   b) ¿Cuántos km podrá hacer con el depósito lleno con 70 litros?

3) Un tren ha hecho un recorrido en 3 horas a una velocidad de 60 km/h.
   a) ¿Cuánto tardará si disminuye a 50 km/h?
   b) ¿A qué velocidad tendrá que ponerlo para tardar sólo 2 horas?

4) Un rectángulo tiene 22 cm de base y 15 cm de altura. Si queremos construir otro rectángulo de la misma área pero con 10 cm de base, ¿cuánto debe tener de altura?

5) En una oficina con 50 personas, el 32 % son hombres. Calcula el número de hombres y mujeres.

6) En una fábrica 560 personas cobran menos de 1.000 €, representando el 80 % de la plantilla. ¿Cuántos trabajan en total en la fábrica ?. ¿Cuántos cobran más de 1.000 €?

7) Al comprar un televisor de 999 € a plazos, te suben un 5 %. ¿Cuál será el precio final?

8) ¿Qué porcentaje de descuento me han aplicado si al comprar un reloj de 230€ he pagado 195 € ?

9) (examen 2010) En un examen de biología aprueba el 52 % del alumnado. Posteriormente, los suspendidos realizan una recuperación, aprobando el 25%. Si en total son 32 los aprobados.
   a) ¿Cuál es el porcentaje de aprobados?
   b) ¿Cuántos alumnos/as son en total?

10) (examen 2011) Las 3/4 partes de las plazas de un avión son de clase preferente y el resto de clase turista. El 40 % de las plazas de clase preferente y el 70 % de las de clase turista están ocupadas y el resto vacías. Si el total de plazas ocupadas son 228. ¿Cuál es el número total de plazas del avión?

# 2. Polinomios

La utilización de las letras para representar cantidades desconocidas permite la utilización de expresiones que simplifican el lenguaje matemático.

### Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es aquella en la que se utilizan letras, números y los signos de las operaciones.

Ejemplos: $2xy + 5y - 3$

$$\frac{1}{3}x + \sqrt{2}x - 3$$

$$\frac{9x}{10}$$

### Valor numérico de una expresión algebraica

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por valores concretos y se realizan las operaciones indicadas se obtiene un número que es el "valor numérico" de la expresión algebraica para los valores de las letras dados.

Una expresión algebraica puede tener tantos valores numéricos como números se le asigne a cada una de las letras, o sea, infinitos.

Ejemplo: el valor numérico de $x^2 - 3$ para $x = 3$ es: $3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$
para $x = -1$ es : $(-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
para $x = 1/2$ es : $(1/2)^2 - 3 = 1/4 - 3 = -11/4$

### Clases de expresiones algebraicas:

Al número que multiplica a las letras le llamamos coeficiente, a la letra o letras les llamamos parte literal y al exponente le llamamos grado.

Ejemplo: Coeficiente $\leftarrow$ $5x^3$ $\rightarrow$ Grado
Parte literal $\leftarrow$

Si hay más de una letra el grado de un término es la suma de los exponentes de cada una de las letras.

Ejemplo: Coeficiente $\leftarrow$ $2\,\underbrace{a^5b^6c^2}$ $\rightarrow$ Grado es $5 + 6 + 2 = 13$
Parte literal $\leftarrow$

Si una expresión algebraica está formada por un solo sumando (o término), los exponentes de las letras son naturales y la única operación entre letras y números es el producto se llama monomio.

Ejemplo: $4x^4$, $5bc^3$, $3/5\,x^3y^5$ → son monomios
$2x/y$, $4x^{-3}$, $5x\,y^{-4}$ → no son monomios

Monomios semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal y el mismo grado.

Ejemplo: $-3x^4y^3$, $5x^4y^3$, $1/2x^4y^3$, $-6x^4y^3$ → monomios semejantes
$xy^3$, $3xy^2$, $2xy$ → no son monomios semejantes

Toda expresión algebraica que esté formada por la suma o resta de dos monomios se llama binomio.

Ejemplo: $5x^6 + 3xy$, $a - 3b$, $2x - 7y$ → son binomios

Si la expresión algebraica resulta de la suma o resta de varios monomios se llama polinomio.

## Polinomios

Resultan de la suma o resta de varios monomios. Para ordenar un polinomio colocamos los monomios de mayor a menor, según su grado.

Ejemplo: $x^5 - 3x + 6x^4 + 3x^2 - 2x^6 \rightarrow -2x^6 + x^5 + 6x^4 + 3x^2 - 3x$

Para completar un polinomio añadimos los términos que falten con coeficiente 0.

Ejemplo: $-2x^6 + 6x^4 + 3x^2 - 3x \rightarrow -2x^6 + 0x^5 + 6x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 3x$

Grado de un polinomio es el mayor exponente de sus términos. Grado de un polinomio con relación a una letra es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio.

Ejemplo: $x^4 + x^3y + x^2y^3 - xy^6$ es de grado 7, pero es de grado 4 respecto a la x y de grado 6 respecto a la y

Término independiente de un polinomio con relación a una letra es el término en que no aparece dicha letra.

Ejemplo: en $x^3 - x^2 + 3x - 6$ el término independiente es -6. Y en $x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 12$ el término independiente es 12.

El término independiente con relación a una letra puede considerarse que tiene esa letra con exponente 0.

## Operaciones con monomios

### Suma y resta.

Para sumar o restar dos monomios tienen que ser semejantes. La suma o resta es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes.

Ejemplo: $5x^4y^3 - 6x^4y^3 = -x^4y^3$

$2x^3 - 4x^3 - 9x^3 = (2 - 4 - 9)x^3 = -11\,x^3$.

$4x^4y^3 + 2x^2y = 4x^4y^3 + 2x^2y$. Observa que no se pueden sumar al no ser semejantes.

### Producto

Para multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes de cada uno entre sí, teniendo en cuenta el signo, y la parte literal, considerando que para multiplicar potencias que tengan la mima base se suman los exponentes.

Ejemplo: $2x^3 \cdot 5x^7 = 10\,x^{10}$

$-x^5y^5 \cdot 2x^2 \cdot 3x^4 = -6\,x^{11}\,y^5$

$4x^4y^5 \cdot 2x^2y \cdot 3x^3 = 24\,x^9\,y^6$

### División

Dos monomios se pueden dividir siempre que el grado del dividendo sea mayor o igual que el grado del divisor.

Para dividir monomios, se dividen los coeficientes de cada uno entre sí, teniendo en cuenta el signo, y la parte literal, considerando que para dividir potencias que tengan la mima base se restan los exponentes.

Si en el divisor aparece una letra con una potencia mayor que en el dividendo, el resultado no sería un monomio pues quedaría, al restar los exponentes, un exponente negativo (recuérdese que los exponentes de las letras deben ser positivos).

Ejemplo: $4x^4y^3 : 2x^2y = 2\,x^2y^2 \rightarrow$ es un monomio
$6x^4y : x^3 = 6xy \rightarrow$ es un monomio
$2x^2y : (-3x\,y^3) = -\,2/3\;x\,y^{-2} \rightarrow$ no es un monomio

## Operaciones con polinomios

### Suma y resta

Para sumar o restar polinomios se suman o restan los monomios semejantes. Se pueden colocar uno bajo otro o realizar la operación directamente.

Ejemplo:
$$\begin{array}{r} 7x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x \\ +\;\; 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 - x \\ \hline 10x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x \end{array}$$

Ejemplo: $(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7) + (5x^3 - x^2 + 5x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7 + 5x^3 - x^2 + 5x = 4x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

Si en lugar de sumar dos polinomios se tratara de restarlos, bastaría cambiar el signo a todos los términos del segundo y sumar los resultados.

Ejemplo:
$$\begin{array}{r} 7x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x \\ -\;\; 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 - x \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 7x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x \\ +\;\; -3x^5 - 0x^4 - 0x^3 + x^2 + x \\ \hline 4x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 6x^2 - x \end{array}$$

Ejemplo: $(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7) - (5x^3 - x^2 + 5x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7 - 5x^3 + x^2 - 5x = 4x^4 - 7x^3 - x^2 - 7\,x + 7$

### Producto

Para multiplicar dos polinomios se deben multiplicar todos los monomios de uno por todos los del otro y sumar los monomios semejantes. Se pueden colocar uno bajo otro o realizar la operación directamente.

Ejemplo: $(2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) \cdot 3x^3 = 6x^8 + 9x^7 - 6x^6 - 3x^5 + 6x^4$
Polinomio · monomio

Ejemplo:
$$\begin{array}{r} 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \\ 2x^3 + 2x \\ \hline +2x^6 + 10x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 \\ 4x^8 + 10x^7 - 4x^6 - 2x^5 + 4x^4 \qquad\qquad \\ \hline 4x^8 + 10x^7 - 2x^6 + 8x^5 + 2x^2 - x^3 + 4x^2 \end{array}$$
Polinomio · Polinomio

Ejemplo: $(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7)(x^2 + 5x) = 4x^6 + 20x^5 - 2x^5 - 10x^4 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^3 - 10x^2 + 7x^2 + 35x = 4x^6 + 18x^5 - 12x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 35x$

## División

Con los polinomios dividendo y divisor ordenados de mayor a menor grado:

Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, dando lugar al primer término del cociente.

Se multiplica dicho término por el divisor y se coloca debajo del dividendo con los signos contrarios, cuidando que debajo de cada término se coloque otro semejante.

Se suman los polinomios colocados al efecto, obteniéndose un polinomio de grado menor al inicial.

Se continua el proceso hasta que el resto ya no se pueda dividir entre el divisor por ser de menor grado.

Ejemplo :

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4x - 5 & 2x \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4} & 2x^3 - x^2 + 3x - 2 \\
\quad 0 - 2x^3 & \\
\quad \underline{+2x^3} & \\
\qquad 0 + 6x^2 & \\
\qquad \underline{-6x^2} & \\
\qquad\quad 0 - 4x & \\
\qquad\quad \underline{+4x} & \\
\qquad\qquad 0 - 5 &
\end{array}
$$

D(x):d (x) = $2x^3 - x^2 + 3x - 2$
R(x) = -5

Ejemplo:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x - 5 & 2x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4 \qquad\quad -2x^2} & 2x^2 - 3x + 2 \\
0 - 6x^3 + 4x^2 - 4x & \\
\quad \underline{6x^3 + \qquad +3x} & \\
\qquad 0 + 4x^2 \; - x \; - 5 & \\
\qquad \underline{-4x^2 \qquad -2} & \\
\qquad\quad 0 \; - x - 7 &
\end{array}
$$

D(x):d(x) = $2x^2 - 3x + 2$
R(x) = -x - 7

## Regla de Ruffini

La regla de Ruffini se utiliza fundamentalmente cuando el polinomio dividendo tiene como única letra (variable) la x y el divisor es un binomio del tipo (x – a), siendo "a" un número entero; por ejemplo (x – 1), (x + 2), etc.

Se deben colocar todos los coeficientes del dividendo ordenados de mayor a menor grado y si falta el de algún grado intermedio colocar un 0.

Se "baja" el primer coeficiente del dividendo.

Se multiplica "a" por el coeficiente bajado y se coloca el resultado debajo del segundo coeficiente (el signo de a será positivo si el divisor es del tipo (x – a) y negativo si el divisor es del tipo (x + a).

Se suma el segundo coeficiente con el resultado anterior.

Se continúa el proceso hasta terminar con los coeficientes.

Los números de la fila inferior obtenida son los coeficientes del cociente (de un grado menor al dividendo) excepto el último número que es el valor del resto.

Ejemplo: $(x^3 + x^2 - 15x - 1):(x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -15 & -1 \\ -5 & & --5 & 20 & -25 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -26 \end{array}$$

El cociente es $x^2 - 4x + 5$ y el resto es -26

Ejemplo: $(x^3 + - 6x - 1):(x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -6 & -1 \\ 2 & & 2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -5 \end{array}$$

El cociente es $x^2 + 2x - 2$ y el resto es -5

**Teorema del resto**

El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x – a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a)

Ejemplo: $(x^3 - 3x^2 + 2x - 8):(x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 2 & -8 \\ 4 & & 4 & 4 & 24 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 16 \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

$P(4) = 4^3 - 3\cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 8 = 64 - 48 + 8 - 8 = 16$

El valor numérico del polinomio en x = 4 coincide con el resto siendo el divisor x - 4

**Factorización de polinomios**

Si se realiza el producto $(x - 2)\cdot(x + 4)$ se obtiene $x^2 + 2x - 8$ por lo que puede expresarse dicho polinomio como producto de factores: $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)\cdot(x + 4)$.

Conseguir, cuando sea posible, expresar un polinomio como producto de binomios de primer grado, o al menos algún binomio de ese tipo, es lo que se denomina "factorizar el polinomio".

Para conseguir factores del tipo mencionado (x - a), bastará encontrar valores de "a" para los que la división, que se efectúa por la regla de Ruffini, sea exacta, o sea que el resto sea 0 y aplicar que "Dividendo = divisor · cociente + resto" con lo que quedaría en términos de polinomios con la variable x: D(x) = d(x) · c(x) obteniéndose ya el polinomio dividendo descompuesto en dos factores.

Una regla muy útil: Los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.

Los valores x = a tal que P(a) = 0 se denominan raíces del polinomio.

Ejemplo: para $x^2 + x - 2$ las posibles raíces enteras son: $\pm 1$, $\pm 2$,

$P(1) = 1 + 1 - 2 = 0$
$P(-1) = 1 - 1 - 2 = -2$
$P(2) = 4 + 2 - 2 = 4$
$P(-2) = 4 - 2 - 2 = 0$
Las raíces son $x = 1$, $x = -2$ $\rightarrow$ $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

Ejemplo: para $2x^2 + x - 3$ las posibles raíces enteras son: $\pm 1$, $\pm 3$,

$P(1) = 2 + 1 - 3 = 0$

La raíz es $x = 1$ hacemos la división para encontrar el cociente

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -3 \\ 1 & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x - 3)$

Antes de aplicar Ruffini, si se puede, se sacan factores comunes.

Ejemplo: $2x^3 + x^2 - 3x = x(2x^2 + x - 3) = x(x - 1)(2x - 3)$

**Igualdades notables**

Cuadrado de un binomio suma $(a + b)^2$ o diferencia $(a - b)^2$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplo: $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$
$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
$(-x + 5)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

Suma por diferencia. Se refiere al producto de un binomio suma por ese mismo binomio diferencia.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba + b^2 = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados.

Ejemplo: $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$
$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
$(-x + 5)(-x - 5) = (-x)^2 - 5^2 = x^2 - 25$

Cubo de una suma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ejemplo: $(x + 2y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 4y^2$
$(-x + 5)^3 = (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (-x) \cdot 5^2 + 5^3 = -x^3 + 15x^2 - 75x + 125$

Cubo de una diferencia: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplo: $(x - 3)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

Cuadrado de un trinomio: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ejemplo: $(x + 2y + 1)^2 = x^2 + (2y)^2 + 1^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 2 \cdot x \cdot 1 + 2 \cdot 2y \cdot 1 =$
$= x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y$

**Actividades resueltas**

1. De las siguientes expresiones algebraicas indica cuáles son polinomios:

$a. 2x - \frac{3}{x}$ $\qquad$ $b. x^3 - 5x^{-6} + 1$ $\qquad$ $c. 2xy - 3x^2$

$d. (2x - 3)^3$ $\qquad$ $e. 3\sqrt{x} + 5x - 1$ $\qquad$ $f. -\sqrt{3}x^8 - 2$

a. b. y e. no son polinomios pues los exponentes de las variables no son números enteros

2. Indica en los siguientes polinomios:

$A(x) = 5x^3 - \frac{2}{5} - 9x^7$ $\qquad$ $B(x) = 3x^2y - 5x^3y^5 - 5 - 7x^9$

a. El número de términos o monomios de cada polinomio.

b. El coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio.

c. El grado del polinomio.

d. El término independiente del polinomio.

e. El coeficiente principal del polinomio.

f. Ordénalos de forma creciente.

| | $A(x) = 5x^3 - \frac{2}{5} + 9x^7$ | | | $B(x) = 3x^2y - 5x^3y^5 - 5 - 7x^9$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Términos | $5x^3$ | -2/5 | $9x^7$ | $3x^2y$ | $-5x^3y^5$ | -5 | $-7x^9$ |
| Coeficiente | 5 | -2/5 | -9 | 3 | -5 | -5 | -7 |
| Parte literal | $x^3$ | No tiene | $x^7$ | $x^2y$ | $x^3y^5$ | No tiene | $x^9$ |
| Grado | 3 | 0 | 7 | 3 | 8 | 0 | 9 |
| Grado polinomio | | | 7 | | | | 9 |
| T. independiente | | -2/5 | | | | -5 | |
| Coeficiente principal | | | -9 | | | | -7 |
| Ordenados | $-9x^7 + 5x^3 - 2/5$ | | | $-7x^9 - 5x^3y^5 + 3x^2y - 5$ | | | |

3. Halla el valor numérico para x = 6, x = -2 y x = 1/2 de las siguientes expresiones algebraicas:

$a. x + 5$ $\qquad$ $b. 3(x - 2)$ $\qquad$ $c. 3x^2 - x$ $\qquad$ $d. \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4$

d. Posibles raíces: 1, -1, 3 -3
P(1) = 1+ 2 – 3 = 0

$\boxed{x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)(x-1)(x+3)}$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -5 | 3 |
| 1 | | 1 | 2 | -3 |
| | 1 | 2 | -3 | 0 |
| 1 | | 1 | 3 | |
| | 1 | 3 | 0 | |

e. $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2)$
Posibles raíces: 1, -1, 2, -2

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -2 |
| 1 | | 1 | 2 |
| | 1 | 2 | 0 |

$\boxed{x^3 + x^2 - 2x + 3 = x(x-1)(x+2)}$

Observa que antes de aplicar Ruffini hemos sacado factor común.

**Actividades propuestas**

1. Indica qué expresiones son polinomios y decir el grado del polinomio, el término independiente y el coeficiente del término de mayor grado:

   a. $\frac{1}{5}x^3 - x + 1$  b. $\frac{x^2+1}{2}$  c. $\sqrt{x+2}$  d. $5x^4 - 3x^2y + 7$

2. Dados los polinomios siguientes, hallad los valores numéricos que se indican:

   a. $P(x) = x^2 + x - 2$  $x = 3$
   b. $Q(x) = -x^3 + x - 5$  $x = -2$

3. Calcula las siguientes sumas o restas:

   a. $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$  $Q(x) = x^2 - 7x - 3$  $P(x) + Q(x)$
   b. $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$  $Q(x) = x^2 + 7x - 2$  $P(x) - Q(x)$
   c. $P(x) = 3x^2 - 1$  $Q(x) = x^3 - 7x - 5x^2 - 3$  $P(x) + Q(x)$
   d. $P(x) = (7x^3 - 5x^8 + 6x^2 - 1)$  $Q(x) = (x - 5x^4 - 3x^2 - 1)$  $P(x) - Q(x)$

4. Calcular los siguientes productos de polinomios:

   a. $(2x^2 + 1) \cdot (3x - 2) =$
   b. $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3) \cdot (2x^2) =$
   c. $(x+1) \cdot (x+1) =$
   d. $(x+2) \cdot (x-2) =$

5. Calcula los cuadrados de los binomios que se indican:

   a. $(x+3)^2$  b. $(2x+4)^2$  c. $(3x-2)^2$  d. $\left(2x^2 - x\right)^2$

6. Realiza las siguientes operaciones simplificando el resultado todo lo posible:

   a. $(m+p)^2-(m-p)^2$ b. $(2x-3)(2x+3)$ c. $(2x+3)^3$

7. Efectuar las siguientes divisiones de polinomios:

   a. $\left(3x^5+2x^4-7x^3+2x-3\right):\left(x^2\right)=$
   b. $\left(3x^4+5x^3-2x+3\right):\left(x^2-3x+2\right)=$
   c. $\left(3x^5-2x^3+7x^2-2x\right):\left(x^3+3x^2-1\right)=$

8. Determina el polinomio cociente y el resto aplicando la Regla de Ruffini:

   a. $\left(x^4-2x^2+3x^3-1\right):(x+2)$ b. $\left(4x^3-2x+1\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

9. Utilizando la Regla De Ruffini, halla el valor numérico de:

   a. $x^4-2x^2+x+2$ para $x=3$

   b. $x^4-4x^3-125$ para $x=5$

10. Determinar el valor de m para que al dividir el polinomio $P(x)=x^4-4x^2+3x+m$ entre $x+2$ el resto sea -3.
11. Determinar el valor de a para que 3 sea raíz del polinomio $q(x)=x^3-6x^2+ax-2$.
12. Comprobar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

    a. 3 es una raíz de $x-3$

    b. 1 es una raíz de $x^4-3x^3+2x-5$

13. Descomponer en factores los siguientes polinomios:

    a. $x^3+x^2-x-1$

    b. $x^3-2x^2+x$

    c. $x^3-2x^2+2x-4$

    d. $2x^3-2x^2+x-1$

    e. $9x^2-25$

    f. $x^2-6x+9$

    g. $9x^4+6x^2+1$

14. Al dividir un polinomio P(x) entre $x^2+2$ el cociente que se obtiene es $2x^2+3x-5$ y el resto $x+3$. Calcula el polinomio P(x).

Factoriza los siguientes polinomios:

$A(x)=x^2-5x-6$

$B(x)=x^5-5x^4-6x^3$

$C(x)=x^3-x$

$D(x)=x^3+3x^2-4x$

$E(x)=x^4-5x^2+4$

$F(x)=x^3+4x^2+4x$

$G(X)=x^3-3x+2$

$H(x)=x^4+2x^3-23x^2-60x$

$I(x)=x^5+8x^4+21x^3+18x^2$

$J(x)=9x^4-36x^3+26x^2+4x-3$

$K(x)=2x^5+2x^4-2x^3-2x^2$

$L(x)=4x^4-37x^2+9$

$M(x)=6x^4+21x^3+24x^2+9x$

$N(x)=x^5+10x^4+32x^3+40x^2+31x+30$

$O(x)=x^6+2x^5-2x^3-x^2$

$P(x)=x^6+2x^5-14x^4+5x^3+4x^2+20x$

$Q(x)=x^3-7x^2+14x-8$

$R(x)=x^4-4x^3+4x^2-4x+3$

$S(x)=2x^3+2x^2-24x$

$T(x)=x^4+9x^3-10x^2$

## EJERCICIOS EXAMENES : GRADO SUPERIOR Y ACCESO UNIVERSIDAD

### TEMAS 1 y 2: Números y Polinomios

1ª) **(Cicles 2009)** A Marina, Elena y José les ha tocado la lotería y tienen que repartirse un premio de 3.000 €. Completa, razonando las respuestas y haciendo todas las operaciones que consideres necesarias, la siguiente tabla para saber qué premio les corresponde a cada uno teniendo en cuenta que el reparto es proporcional a lo jugado.

| | MARINA | ELENA | JOSE | TOTAL |
|---|---|---|---|---|
| Dinero jugado | 10 € | 20 € | 30 € | 60€ |
| Premio conseguido | | | | 3.000€ |

2ª) **(Cicles 2008)** Calcula m para que el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 9x + 9$ sea divisible por $x - 3$.

3ª) **( Cicles 2007 )** Calcular m para que el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 11x - 12$, sea divisible por $x - 3$

4ª) **(Cicles 2006)** Calcular m para que el polinomio $P(X) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$, sea divisible por $x + 1$

5ª) **( Cicles 2004 )** Encuentra un polinomio sabiendo que al dividirlo entre $x^3 + 9$ obtenemos de cociente $x^2 - 5x + 6$ y de resto $x^2 - x + 9$

6ª) **( Universitat 2005)** Encontrar las raíces de la ecuación

$X^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

7ª) **( Universitat Posible prueba)** Calcular el cociente y el resto que resulta al dividir el polinomio $x^3 - 3x^2 + 7x + 2$ entre $x - 3$

# 3. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

### Igualdades

Una igualdad es una relación de equivalencia entre dos expresiones numéricas o algebraicas. Cada una de las expresiones separadas por el signo igual recibe el nombre de miembro.

$$\text{Primer miembro} = \text{Segundo miembro}$$
$$2x^2 - 1 = x - 5$$

Si las expresiones son algebraicas a las letras se les llama incógnitas.

### Identidades

Una igualdad de expresiones que se cumple para cualquier valor de la incógnita se denomina identidad. Una identidad es numérica si la igualdad se cumple entre números.

Ejemplo: $2 + 4 + 5 = 1 + 10$

Una identidad literal es una igualdad que se cumple para cualquier valor que tomen las incógnitas.

Ejemplo: $2x + 3x = 5x$
Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$2(x - 1) + 2x = 4x - 2$

### Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se satisface sólo para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplos: a) $x + 2 = 0$ es una ecuación con una incógnita.
b) $3x + 2y = 1$ es una ecuación con dos incógnitas.

Al valor, o valores, que satisfacen la igualdad se les llama solución (o raíz) de la misma. Resolver una ecuación es hallar su solución.

Ejemplo: Una solución de la ecuación $x - 3 = 1$ es $x = 4$.
Soluciones de $3x - 2y - 1 = 0$ son $x = 1$, $y = 1$; $x = 0$, $y = -1/2$; $x = 2$, $y = 5/2$
$x^2 - 1 = 0$ tiene dos soluciones, $x = 1$ y $x = -1$
$x^2 + 1 = 0$ es una ecuación sin soluciones en R.
$2x + 3y = 0$ tiene infinitas soluciones: (0,0), (-3,2), (3, -2)....

### Ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones más sencillas son las de primer grado: aquellas en las que la incógnita tiene exponente 1.

Resolver una ecuación consiste en averiguar la incógnita pasando por diferentes ecuaciones equivalentes aplicando convenientemente las reglas siguientes.

"Si sumamos o restamos un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación la igualdad se mantiene y obtenemos una ecuación equivalente a la primera".

Ejemplo: $x + 5 = 7 \rightarrow (x + 5 - 5 = 7 - 5) \rightarrow x = 7 - 5$

Observa que se corresponde con la famosa frase: "lo que está sumando pasa restando y viceversa".

"Si multiplicamos o dividimos por un mismo número o expresión algebraica los dos miembros de una ecuación la igualdad se mantiene y obtenemos una ecuación equivalente a la primera".

Ejemplo: $2x = 4 \rightarrow \quad \frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow \quad x = 4/2 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Observa que se corresponde con la famosa frase: "lo que está multiplicando pasa dividiendo y viceversa".

No todas las ecuaciones tienen solución:

Ejemplo: $3x + 5 = 3x - 6$

Si al triple de un nº le sumas 5 el resultado nunca coincidirá con el resultado de restarle 6.

Pasos para resolver una ecuación:

**1º-** Se quitan los paréntesis si los hay.

**2º-** Se quitan los denominadores si los hay con ayuda del mcm de los denominadores.

**3º-** Se pasan todas las incógnitas al 1$^{er}$ miembro de la igualdad (transponer términos).

**4º-** Se reducen los términos semejantes.

**5º-** Hallamos el valor de la incógnita.

Ejemplo: $5x - 7 = 28 + 3x;$

$5x - 3x = 28 + 7;$

$2x = 35 \rightarrow x = 35/2$

Ejemplo: $2(x - 3) = 5x + 4;$

$2x - 6 = 5x + 4;$

$2x - 5x = 4 + 6;$

$-3x = 10 \rightarrow x = -10/3$

Ejemplo: $\frac{2-x}{2} - \frac{x+1}{3} = 4$; mcm (2,3) = 6

$$\frac{3(2-x)}{6} - \frac{2(x+1)}{6} = \frac{6 \cdot 4}{6}$$

$$3(2-x) - 2(x+1) = 24$$

$6 - 3x - 2x - 2 = 24$

$4 - 5x = 24$

$-5x = 24 - 4 = 20$

$x = 20/-5 = -4$

**Ecuaciones de segundo grado**

Tenemos una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, cuando la variable o incógnita está elevada al cuadrado (elevada a exponente 2).

Ejemplos: $7x^2 + 5x - 24 = 0$, $x^2 + 5x = -85$, $13x^2 = 7$, $4x^2 - 4x = 0$

En general, una ecuación cuadrática tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales; x es la incógnita o variable.

Veamos cómo se resuelven estas ecuaciones en función de los casos que se presenten.

**Si es de la forma $ax^2 + bx = 0$ (c = 0)**

Sacando factor común *x* en el primer miembro, resulta: $x(ax + b) = 0$.

Para que un producto de dos factores x y (ax + b), dé como resultado cero, uno de ellos debe ser cero: $x = 0$ ó $ax + b = \rightarrow x = -b/a$

En consecuencia, las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ tienen dos soluciones: $x_1 = 0$ y $x_2 = -b/a$

Ejemplo: $5x^2 + 4x = 0$

$x(5x + 4) = 0$

$x = 0$

$5x + 4 = 0 \rightarrow x = -4/5$:

**Si es de la forma $ax^2 + c = 0$ (b = 0)**

Despejando $x^2 = -c/a \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Si $-\frac{c}{a}$ es negativo, la ecuación no tiene solución, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Ejemplo: $5x^2 + 125 = 0 \rightarrow 5x^2 = -125 \rightarrow x^2 = -125/5 = -25 \rightarrow x = \sqrt{-25} \rightarrow$ no hay solución

Si $-\frac{c}{a}$ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones.

Ejemplo: $5x^2 - 125 = 0 \rightarrow 5x^2 = 125 \rightarrow x^2 = 125/5 = 4 \rightarrow x = \sqrt{25} \rightarrow x = \pm 5$

**Si es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$**

Para hallar directamente las raíces aplicaremos la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación de 2º y se verifica:

Si D > 0 la ecuación tiene dos soluciones

Si D = 0 la ecuación tiene una única solución (doble)

Si D < 0 la ecuación no tiene ninguna solución real.

Ejemplo: $3x^2 - 2x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6} = \begin{cases} 10/6 = 5/3 \\ -6/6 = -1 \end{cases}$$

Ejemplo: $3x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-60}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-54}}{6} \quad \text{no tiene solución}$$

Ejemplo: $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{6} = \frac{2 \pm 0}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{solución doble}$$

**Descomposición en factores de un polinomio de grado superior a dos**

Podemos descomponer un polinomio en un producto de dos factores utilizando Ruffini en el caso de que las raíces sean enteras.

Si resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones obtenidas $x_1$ y $x_2$ (enteras o no), son las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c \rightarrow ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

Ejemplo: Factorizar $x^3 - x^2 - 3x + 3$

Posibles divisores 1,-1, 3, -3
$P(1)=1- 1 - 3 + 3 = 0$, luego 3 es raíz del polinomio.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -3 | 3 |
| 1 | | 1 | 0 | -3 |
| | 1 | 0 | -3 | 0 |

$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x^2 - 3)$
$x^2 - 3$ no tiene raíces enteras. Resolvemos la ecuación $x^2 - 3 = 0$
$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

**Ecuaciones de grado superior a 2**

Suponemos que este tipo de ecuaciones ya se han simplificado todo lo posible para llegar a una ecuación cuyo primer miembro es un polinomio y cuyo segundo miembro es 0.

Si factorizamos el polinomio las raíces del polinomio serán las soluciones de la ecuación.

Ejemplo: $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

Posibles divisores: 1 , -1 $\rightarrow$ $P(1) = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | -1 | -1 |
| 1 | | 1 | 2 | 1 |
| | 1 | 2 | 1 | 0 |

$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$
El polinomio de 2º grado se puede descomponer mediante Ruffini, si hay soluciones enteras o resolviendo la ecuación de 2º grado $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{0}}{2} = -1 \rightarrow \text{solución doble}$$

$(x^2 + 2x + 1) = (x+1)(x+1)$, luego la descomposición de $x^3 + x^2 - x - 1$ es
$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x+1)(x+1)$ $\rightarrow$ raíces 1, -1
Buscamos las soluciones de $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x+1)(x+1) = 0 \rightarrow$ son soluciones $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

Ejemplo: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Hemos de descomponer en factores.

Los divisores del término independiente son 1 y –1 → $P(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 1 | | 1 | 0 | -1 |
| | 1 | 0 | -1 | 0 |

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1)$

$(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$, Ruffini, resolviendo la ecuación o productos notables

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1)$→ raíces: 1, -1

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = 0$ → $x_1 = 1$ (doble), $x_2 = -1$

**Ecuaciones bicuadradas**

Se trata de ecuaciones que se pueden expresar en la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, donde a, b y c son tres números reales.

Para resolver una ecuación bicuadrada se hace el cambio de variable $x^2 = t$, así, $x^4 = (x^2)^2 = t^2$.

La ecuación expresada en función de t quedaría $ay^2 + by + c = 0$. Una vez resuelta esta ecuación se sustituyen sus soluciones en $x^2 = y$, obteniéndose así las soluciones para x.

Ejemplo: resolvamos la ecuación $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$. Hacemos el cambio de la variable $x^2 = t$ y la ecuación queda $t^2 - 4t - 12 = 0$. Resolvemos aplicando la fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado y las soluciones son $t_1=6$ y $t_2=-2$. Como $x^2 = t$, $x = \sqrt{t}$. Si t = 6 el valor de x se calcula así $x = \sqrt{6} = \pm\sqrt{6}$. Si t = -2 el valor de x se calcula así $x = \sqrt{-2}$. En este caso no hay soluciones reales. Luego las soluciones buscadas son $\sqrt{6}$ y $-\sqrt{6}$.

**Ecuaciones irracionales**

Se trata de ecuaciones en las que aparece alguna raíz cuadrada conteniendo en el radicando la incógnita de la ecuación. Para resolver estas ecuaciones se ha de aislar la raíz o una de las raíces que aparezcan en uno de los miembros de la ecuación. Después elevamos ambos miembros al cuadrado y continuamos operando con lo que nos quede. Muy importante es la comprobación de las soluciones para descartar alguna que se haya podido "colar".

Ejemplo: resolvamos la ecuación $\sqrt{x+1} = x$. Como la raíz ya está despejada elevamos al cuadrado y resolvemos:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2$$

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1=2$ y $x_2=-1$.

Comprobamos las soluciones sustituyendo en la ecuación original:

$$\Rightarrow \sqrt{2+2} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

x = 2 es válida

$\Rightarrow \sqrt{-1+2} = -1$

$\sqrt{1} \neq -1$

x = -1 no es válida

**Sistemas de ecuaciones**

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones a las que buscamos la solución común. Se pueden clasificar según,

El grado de las ecuaciones:

Sistema lineal: si todas las ecuaciones son lineales.
Sistema no lineal: si no todas las ecuaciones son lineales.

El número de ecuaciones o de incógnitas que tengan:

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. ...

El número de soluciones:

Sistema **compatible** es el que tiene solución. Dependiendo del número de soluciones puede ser **compatible determinado** si tiene una única solución o **compatible indeterminado** si tiene múltiples soluciones.

Sistema **incompatible** es el que no tiene solución.

Ejemplo: $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ x^2-y=0 \end{matrix}\right\}$ Sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$\left.\begin{matrix} x-y=2 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\}$ Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

**Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:**

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. El método general de resolver sistemas de ecuaciones consiste en encontrar otro sistema equivalente de más fácil resolución. Se llaman transformaciones elementales (o de equivalencia) a aquellas modificaciones de un sistema lineal que lo transforman en otro equivalente. Las siguientes transformaciones son elementales.

Permutar dos ecuaciones.

Multiplicar una ecuación del sistema por un número distinto de 0.

Sumar a una ecuación del sistema otra multiplicada por un número.

Cambiar el orden de las incógnitas.

Despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en las demás ecuaciones.

Suprimir o añadir una ecuación que sea combinación lineal de las otras.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales podemos utilizar tres métodos:

**Sustitución**

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}2x+4y=7\\4x-5y=3\end{array}\right\}$

Se despeja la x de una de las ecuaciones $x=\dfrac{7-4y}{2}$

El valor de la x despejada una ecuación se sustituye en la x de la otra ecuación de abajo: $4\cdot\dfrac{7-4y}{2}-5y=3$ y se resuelve la ecuación

$$2\cdot(7-4y)-5y=3$$
$$14-8y-5y=3$$
$$14-13y=3$$
$$14-3=13y$$
$$11=13y \quad\Rightarrow\quad y={}^{11}\!/_{13}$$

El valor de la y obtenida se sustituye por la y de la ecuación de arriba.

$$x=\frac{7-4y}{2}=\frac{7-4\cdot\frac{11}{13}}{2}=\frac{7-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{91}{13}-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{47}{13}}{2}=\frac{47}{26}$$

Solución x = 47/26, y = 11/13

**Igualación**

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}2x+4y=7\\4x-5y=3\end{array}\right\}$

Se despeja la x de las dos ecuaciones $x = (7 - 4y) / 2$
$x = (3 + 5y) /4$

Se igualan las x, se resuelve la ecuación

$$\frac{7-4y}{2}=\frac{3+5y}{4}$$
$$2\cdot(7-4y)=3+5y$$
$$14-8y=3+5y$$
$$14-3=8y+5y$$
$$11=13y \quad\Rightarrow\quad y={}^{11}\!/_{13}$$

El valor de la y obtenida se sustituye por la y de cualquiera de las ecuaciones

$$x=\frac{7-4y}{2}=\frac{7-4\cdot\frac{11}{13}}{2}=\frac{7-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{91}{13}-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{47}{13}}{2}=\frac{47}{26}$$

Solución x = 47/26, y = 11/13

**Reducción**

Hemos de buscar un sistema equivalente en el cual una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente, cambiado de signo en una de las ecuaciones.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} 2x+4y=7 \\ 4x-5y=3 \end{array}\right\}$

Multiplicamos la 1ª ecuación por $-2$ → $-2(2x+4y=7)$ → $-4x-8y=-14$
Se la sumamos a la segunda ecuación $4x-5y=3$

$$\begin{array}{r} -4x-8y=-14 \\ 4x-5y=3 \\ \hline -13y=-11 \end{array}$$

El nuevo sistema es $\left.\begin{array}{r} 2x+4y=7 \\ -13y=-11 \end{array}\right\}$

Despejamos la y: $y = 11/13$. Luego calculamos x en la primera ecuación:

$$x=\frac{7-4y}{2}=47/26$$

## Sistema de ecuaciones lineales con tres (o más) incógnitas: Método de Gauss

El método de Gauss para la resolución de sistemas lineales se puede considerar como un generalización del de *reducción* (para los sistemas con dos o tres incógnitas). En esencia consiste en hacer, al sistema de ecuaciones lineales, determinadas transformaciones elementales a fin de obtener un sistema escalonado, más fácil de resolver.

Ejemplo: Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x+3y-4z=2 \\ x-y-z=1 \\ x+2y+z=0 \end{array}\right\}$

Permutamos las ecuaciones 1ª y 3ª para que el primer coeficiente sea 1:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z=0 \\ x-y-z=1 \\ 2x+3y-4z=2 \end{array}\right\}$$

Dejamos la 1ª ecuación como está y la "operamos" sobre la 3ª y 2ª para eliminar x.
La 2º ecuación es el resultado de multiplicar la 1º por $-1$ y sumarla con la 2º
La 3º ecuación es el resultado de multiplicar la 1º por $-2$ y sumarla a la 3º

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ -3y-2z=1 \\ -y-6z=2 \end{array}\right\}$$

Permutamos las ecuaciones 2ª y 3ª

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ -y-6z=2 \\ -3y-2z=1 \end{array}\right\}$$

Dejamos la 1º y 2º como están. La 3º es el resultado de multiplicar la 2º por -3 y sumarla con la 3º

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0 \\ -y-6z=2 \\ 16z=-5 \end{array}\right\}$$

Hasta aquí es el método de Gauss ya se ha conseguido un sistema escalonado, ahora para resolverlo se procede despejando de abajo arriba:
$z = -5/16$, de donde

$y = -6z - 2 = -6(-5/16) - 2 = -2/8 = -1/4$
$x = -2y - z = -2(-1/4) - (-5/16) = 13/16$
La solución es: (13/16, -1/8, -5/16)

Ejemplo: Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ 2y+4x+5z=-7 \\ -5y-6x-z=-1 \end{array}\right\}$

Multiplicamos la 1ª ecuación por -2 y se la sumamos a la segunda:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ -z=11 \\ -5y-6x-z=-1 \end{array}\right\}$$

Permutamos las ecuaciones 2ª y 3ª:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ -5y-6x-z=-1 \\ -z=11 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos la 1ª ecuación por 5 y se la sumamos a la 2ª:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ 4x+14z=-46 \\ -z=11 \end{array}\right\}$$

que es un sistema escalonado. Resolvemos despejando de abajo arriba:
$z = -11$
$4x = -46 - 14(-11)$; $x = 27$,
$y = -9 - 2\cdot 27 - 3\cdot(-11) = -9 - 54 + 33$, $y = -30$.
La solución es: (27, -30, -11)

**Sistemas de ecuaciones no lineales**

Un sistema de ecuaciones es no lineal cuando una de las ecuaciones no es lineal.

Si una de ellas es lineal se utiliza el método de sustitución, despejando de la lineal y sustituyendo en las no lineales. A veces, según la apariencia de las ecuaciones se pueden utilizar los otros métodos.

Ejemplo: Resolvamos $\left.\begin{array}{l} 2x+y=3 \\ 2x^2+xy=6 \end{array}\right\}$

Despejamos y en la 1º → $y = 3 - 2x$
Sustituimos en la 2º y operamos:
$2x^2 + x(3 - 2x) = 6$
$2x^2 + 3x - 2x^2 = 6$
$3x = 6 \rightarrow x = 2$
sustituimos la x para obtener y → $y = 3 - 2\cdot 2 = -1$ → solución (2, -1)

Ejemplo: Resolvamos $\left.\begin{array}{l} y=x^2-3x \\ x+y=3 \end{array}\right\}$

sustituimos el valor de y de la 1º en la 2º y operamos:
$x + x^2 - 3x = 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ resolvemos la ecuación de 2º

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 6/2 = 3 \\ -2/2 = -1 \end{cases}$$

Si $x = 3 \rightarrow y = 0$

Si $x = -1 \rightarrow y = 4$

El sistema tiene dos soluciones (3, 0 ); (-1, 4)

## Resolución de problemas mediante ecuaciones o sistemas

Para resolver un problema es conveniente realizar cuatro fases:

Comprender el problema. Identificar datos e incógnitas.

Determinar la relación entre los datos y las incógnitas. Escribir la ecuación o ecuaciones que relacionan datos e incógnitas.

Resolver la ecuación o el sistema por los métodos estudiados.

Examinar la solución obtenida. Comprobar si las soluciones obtenidas son válidas y proceder en consecuencia.

Vamos a resolver problemas de diferentes tipos.

### De números

Halla un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.

Solución: Llamamos x al número que buscamos, la mitad del número es x/2 y su cuarta parte x/4

Entonces: $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = x$

$$\frac{2x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{4}{4} = \frac{4x}{4}$$

$$2x + x + 4 = 4x$$

$$2x + x - 4x = -4$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

El número buscado es 4.

Se atribuye a Pitágoras la siguiente respuesta sobre el número de sus discípulos: "Una mitad estudia matemáticas, una cuarta parte física, una quinta parte guarda silencio y además hay tres mujeres". ¿Cuántos discípulos tenía?

Solución: Llamamos x al número de sus discípulos.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 3 = x$$

$$\text{mcm} = 20 \quad \frac{10x}{20} + \frac{5x}{20} + \frac{4x}{20} + \frac{60}{20} = \frac{20x}{20}$$

$$10x + 5x + 4x + 60 = 20x$$

$$10x + 5x + 4x - 20x = -60$$

$$-x = -60$$

$$x = 60$$

Tenía 60 discípulos.

## RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE 3 ECUACIONES CON 3 INCÓGNITAS

Para la resolución de este tipo de sistemas , se utiliza el **Método de Gauss**:

Consiste en eliminar incógnitas mediante la suma o resta de ecuaciones, obteniendo un sistema de ecuaciones de dos incógnitas.

En resumen, se deben seguir los siguientes pasos:

1º- Se debe reducir la segunda ecuación con la primera, eliminando una de las incógnitas.

2º- Después se reduce la tercera ecuación con la primera, eliminando la misma incógnita que en el proceso anterior para que al final se quede un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

## EJEMPLOS

1º) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ -x + 3y - 2z = 2 \end{array}\right\}$

2º) $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 5 \\ x + y \quad = 2 \\ y + z = 3 \end{array}\right\}$

3º) $\left.\begin{array}{r} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{array}\right\}$

## PROBLEMAS DE SISTEMAS DE 3 ECUACIONES

1º) ( examen) Al ordenar mi habitación observo que el número de libros, revistas y CDs es de 60. El triple del número de CDs es igual a la suma del número de libros y el doble del número de revistas. El cuádruple del número de CDs es igual a la suma de libros y el triple del número de revistas. ¿Cuántos CDs, libros y revistas tengo en mi habitación?.

2º) En una determinada población se representan tres espectáculos que llamaremos E1, E2 y E3 respectivamente, cada uno con un precio diferente.

Calcula el precio de cada uno si se cumplen las siguientes condiciones:

- Si asistiéramos dos veces a E1, una vez a E2, y una vez a E3, nos costaría 34 €.
- Si fuésemos tres veces a E1 y una a E2, nos costaría 46,5 €.
- En el caso de asistir una sola vez a cada uno de los tres espectáculos, nos costaría 21,5 €.

La ecuación a plantear será $15 + x = 12x$,

$15 = 11x \rightarrow$ es $x = 1'3636...$ que, aproximadamente es 1 minuto y 18 segundos.

Por tanto, se superpondrán a las 3h 15m + 1m y 18s, es decir, a las 3h 16m y 18 s.

25. Un albañil y su ayudante tardan 4 horas en poner el suelo de un cuarto de baño. El albañil, más experto en este tipo de trabajos, afirma que él sólo haría el trabajo en 6 horas. ¿En cuánto tiempo lo haría su ayudante?

Si juntos tardan 4 horas en hacer el trabajo, en una hora harán 1/4 de ese trabajo.

El albañil en una hora habrá hecho 1/6 del trabajo.

Si llamamos x al tiempo, en horas, que tardaría el ayudante en hacer el trabajo, en una hora habrá hecho 1/x del trabajo.

La ecuación a resolver será: $\frac{1}{x} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ mcm (x,6,4) = 12x

$$\frac{12}{12x} + \frac{2x}{12x} = \frac{3x}{12x}$$

$$12 + 2x = 3x$$

$$12 = x$$

El primero tardaría 12 horas en hacer solo el trabajo

**Actividades propuestas**

1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 1º grado:

a. $\frac{2x-4}{5} - \frac{x-1}{6} = \frac{x-3}{2} - 1$ b. $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{6} = 1 - \frac{x-1}{4}$ c. $\frac{3x+2}{4} - \frac{4x-4}{10} = 2(x-5)$

2. Resuelve las ecuaciones de 2º grado:

a. $(x-2)(x+3) = 0$ b. $x^2 - 4x + 9 = 0$

c. $x^2 - 13x + 36 = 0$ d. $4 - x^2 = 0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior a 2

a. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ b. $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$

c. $2x^4 - 7x^3 + 4x^2 + 7x - 6 = 0$

4. Halla el valor real de h para que la ecuación $x^2 + hx - 18 = 0$ tiene una raíz igual a $-3$

5. Proporciona una ecuación entera cuyas raíces sean:

a. $x_1 = 2$ , $x_2 = 3$

b. $x_1 = -1$ raíz doble, $x_2 = -2$

6. Resuelve la ecuación $x^4 - 48x^2 - 49 = 0$

7. Resuelve la ecuación $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$

8. Resuelve la ecuación $(x^2 - 5)(x^2 - 3) = -1$

9. Resuelve la ecuación $\sqrt{x}-5=-1$

10. Resuelve la ecuación $\sqrt{x+5}+3=x-12$

11. Resuelve la ecuación $\sqrt{x^2-9}=x+5$; x = -3'4

12. Resuelve la ecuación $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=1$

13. Resuelve la ecuación $\sqrt{6+2\sqrt{5x+2}}=3$

14. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

a. $\left.\begin{array}{l} 3x-2y=-16 \\ 5x+4y=10 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 5x+10y=14 \end{array}\right\}$

c. $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ 2x-2y=6 \end{array}\right\}$ d. $\left.\begin{array}{l} 8x+3y-1=0 \\ y=5-2x \end{array}\right\}$

15. Resuelve los siguientes sistemas lineales

a. $\left.\begin{array}{l} x-y-z=6 \\ -x+3y-z=12 \\ -x-y+7z=24 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{l} 3x+2y+4z=19 \\ 2x+3y+3z=21 \\ 3x-y+z=4 \end{array}\right\}$

16. Resuelve los siguientes sistemas no lineales

a. $\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ x^2+y=4 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x^2-y^2=9 \end{array}\right\}$ c. $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+y=0 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$

17. Halla cinco números enteros consecutivos cuya suma sea 60.

18. Se divide un ángulo recto en tres ángulos, el segundo es el doble del primero, y el tercero es igual al triple del primero menos 18 grados. Calcula los tres ángulos.

19. Llevo recorridos los 7/15 de un camino y aún me faltan 3 km para llegar al final. ¿Qué longitud tiene el camino?

20. Dividir 198 en dos partes, tales que la quinta parte de la primera y la tercera parte de la segunda sumen 42.

21. Luis tiene actualmente 5 veces la edad de su hija, dentro de 3 años, su edad será sólo 4 veces mayor. ¿Cuáles son las edades actuales?

22. En una fracción el numerador tiene 4 unidades menos que el denominador. Si se resta 3 al numerador y se añade 2 al denominador, el valor de la fracción resultante es igual a 2/3. ¿Cuál es el valor de la fracción original?

23. Un padre tiene 48 años y su hijo 15. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el doble de las del hijo?

## EJERCICIOS DE EXÁMENES: SISTEMAS DE ECUACIONES

1ª) (cicles 2008). Resuelve analíticamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$5x - y = 7$$

$$\frac{x^2 + 2y - 2}{X + 2} = x$$

2º) ( Cicles 2007 ). Resolver el sistema:

$$3x - y = 8$$

$$\frac{x - 3y + 2}{x - y} = 1$$

3ª) ( Cicles 2007 ). Una convocatoria de pruebas de acceso a ciclos formativos, examina a 21.000 alumnos, el número de alumnos de Alicante es el doble que el de Castellón, y la mitad que el de Valencia. Calcular cuantos alumnos hay de cada provincia.

4ª) ( Cicles 2006 ). Resolver el sistema:

$$x + 3y = 9$$

$$\frac{x^2 - 2y + 3}{x - 1} = 3 + x$$

5ª) ( Cicles 2006 ) . Una comercial de comida rápida tiene 3 centros c1, c2, y c3, en la misma ciudad. El número de comidas entregadas por la comercial fueron de 608 el pasado fin de semana, pero las entregadas por c3 fueron una quinta parte de las entregadas por c1, y las de c2 fueron inferiores a las entregadas por c1 en 140 unidades. Calcular las comidas entregadas en cada centro.

6º) ( Cicles 2003 ). Una autoescuela tiene abiertas 3 sucursales en la ciudad. El número total de matriculados es de 352, pero los matriculados en la tercera son tan sólo una cuarta parte de los matriculados en la primera. Además, la diferencia entre los matriculados en la primera y los matriculados en la segunda es inferior en 2 unidades al doble de los matriculados en la tercera.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para adivinar el número de alumnos matriculados en cada sucursal.
b) Resuélvelo.

7º) ( Cicles 2003 ) Resuelve la siguiente ecuación con radicales.

$$\sqrt{3x + 1} - \sqrt{2x - 1} = 1$$

8º) ( Cicles 2002). Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2 ( x + 3/4 ) = 3 - 5 ( y + 2 )$$
$$(4x - 2) / 3 = ( x + 5y + 6 ) / 2$$

9º) ( Cicles 2002 ). Resuelve:

$$x - \sqrt{2x - 1} = 1 - x$$

10º) ( Cicles 2001 ). Resuelve la siguiente ecuación con radicales:

$$X + \sqrt{x - 3} = 5$$

# TEMA 1: EQUACIONS I SISTEMES.

1. De les següents igualtats assenyala quines són identitats i quines són equacions:
   a) $9.15 = 3,05\ d$
   b) $5\ (x+3) = 5x + 15$
   c) $2(3x) + 2x = 8x$
   d) $x- (x/5) = (4x/5)$
   e) $15 + 4x = 31$
   f) $9= 2x - 1$

2. Resol les següents equacions de primer grau:
   a) $12x + 8 = 6x + 30$ → $22/6$
   b) $7x + 4 = 5x - 2$ → $-3$
   c) $3 - 5x = 2(5-3x)$ → $7$
   d) $x^2 + x = x^2 - 5$ → $-5$
   e) $2( x+1) - 3( x-2 ) = x + 6$ → $1$
   f) $2x/15 - (3x-5)/20 = (x/5) - 3$ → $15$
   g) $(2x-1) - (3x-1)/3 - 5/3 = ( x+2)/6 + x - 3$ → $2$
   h) $(3x-11)/20 - (5x+1)/14 = (x-7)/10 - (5x-6)/21$ → $-3$
   i) $(2x - 3)/18 - (2-4x)/27 = 5/3 - (2x-1)/6$ → $3'5$
   j) $(4-3x)/5 - (x-3)/10 = (23-x)/15 - (11 + 13x)/20$ → $-7$
   k) $(x-2)/3 + (x+1)/6 = (x-1)/4 + 1$ → $5$

3. Expresseu mitjançant una equació els enunciats següents i resoleu l'equació:
   a) El triple de x, més 4, coincideix amb el quíntuple de x, menys 2. → $x = 3$
   b) El triple de x més 4, coincideix amb el quíntuple de x, menys 2. → $x = 7$

4. Jordi, Judit i Núria, van guanyar 70000 tes. Si Jordi va guanyar triple que Judit, i aquesta el doble que Núria, menys 5000 tes, quant va guanyar cadascun? $x = 10.000$ pts.

5. Les dimensions d'una habitació (longitud i amplària) són dos enters. Si és 3 vegades més llarga que ampla, calculeu les seues dimensions en els següents casos:
   a) El seu perímetre és 96 m. → 12 m.
   b) La seua superfície és de 24 $m^2$. → $\sqrt{8}$

6. Tres germans, A, B i C, es reparteixen 13 caramels. Si al major A, li toquen el doble que al menor, C , quants li toquen a cadascun?

7. Un estudiant va aconseguir al llarg de la seva carrera tres beques per un total de 120000 ptes. Si la segona va ser el doble de la primera, i la tercera va ser de 45000 ptes més que la segona. Quina va ser la quantia de cada beca? $x = 15.000$

8. Li diu un noi al seu germà: "Les nostres edats sumen 28 anys, però si jo tinguera 4 anys menys i tu 4 anys més, seriem bessons." Quants anys té cada germà? $x = 10$

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Seis camisetas y cinco gorras cuestan 227 euros. Cinco camisetas y 4 gorras cuestan 188 euros. Halla el precio de una camiseta y de una gorra.
(Solución: 32 camisetas, 7 gorras )

2. He comprado un cuaderno que costaba 3 euros y para pagarlo he utilizado nueve monedas, unas de 20 céntimos y otras de 50 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado? (Solución: 5 monedas de 20 céntimos, 4 de 50 céntimos )

3. En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?
(Solución:18respuestas correctas , 12 respuestas incorrectas )

4. Calcula dos números cuya suma sea 191 y su diferencia 67.
(Solución: primer número 129 y segundo número 62 )

5. La diferencia de dos números es de 14 y la cuarta parte de su suma es 13. Halla dichos números.
(Solución: primer número 33 y segundo número 19 )

6. Dos números suman 21. Si el primero lo dividimos entre 3 y le restamos la sexta parte del segundo, nos da 1. Halla el valor de los dos números.
(Solución: primer número 9 y segundo número 12)

7. Ente María y Pedro tienen un total de 65 CD's . Sabemos que Pedro tiene 7 CD's más que María. ¿Cuántos CD's tiene cada uno?
(Solución: María tiene 29 CD's y Pedro 36)

8. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 80 m y la altura es 2/3 de su base. (Solución: base 24 m y altura 16)

9. En el aula de 3° A hay doble número de alumnos que en el aula de 3°B. Además se sabe que si se pasan 8 alumnos de 3° A a 3°B ambas aulas tendrán el mismo número de alumnos. ¿Cuántos alumnos hay en cada aula?
(Solución: En el aula de 3° A hay 32 alumnos y en 3°B 16)

10 Tenemos dos grifos A y B. Si abrimos el grifo A durante 3 minutos y el grifo B durante 1 minuto, salen en total 50 l de agua. Si en cambio abrimos el grifo B durante 2 minutos y el A durante 1 minuto, entonces salen en total 40l. ¿Cuántos litros de agua arroja cada grifo en 1 minuto?
(Solución: Grifo A 12 l/min y grifo B 14 l/min)

11. Javier dispone de un capital de 8000 euros, del que una parte la mete en un depósito al 5% anual y otra al 6% anual. Calcula ambas partes sabiendo que el capital acumulado al cabo de un año es de 8450 euros.
(Solución: Capital al 5% 3000 euros y capital al 6% 5000 euros)

1. Resol els sistemes següents:

a) $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=6 \end{cases}$ $x=4$ ; $y=-2$

b) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ $x=2$ ; $y=0$

c) $\begin{cases} 6x+5y=23 \\ -4x+y=-11 \end{cases}$ $x=3$ ; $y=1$

d) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$ $x=3$ , $y=1$

e) $\begin{cases} 2x-3y=-25 \\ 12x-3y=75 \end{cases}$ $x=10$ ; $y=15$

f) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{cases}$ $x=3$ ; $y=1$

g) $\begin{cases} x+y=9 \\ 20x-3y=-4 \end{cases}$ $x=1$ ; $y=8$

h) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=7 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=-2 \end{cases}$ $x=9$ ; $y=20$

i) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=5 \\ \dfrac{5x}{3}-\dfrac{y}{2}=3 \end{cases}$ $x=3$ ; $y=4$

j) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{2}=0 \end{cases}$ $x=1$ ; $y=2$

k) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=3 \\ \dfrac{x+2y}{3}-\dfrac{x-2y}{4}=3 \end{cases}$ $x=8$ ; $y=2$