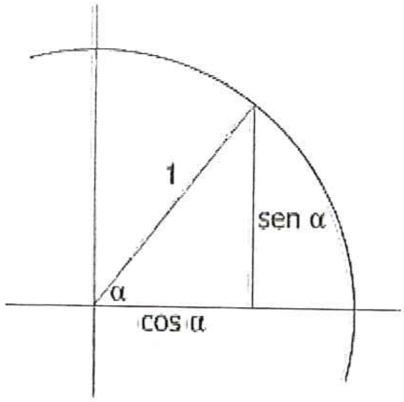
BLOQUE 2 : GEOMETRIA PLANA

- Unidades de medida de ángulos.
- Razones trigonométricas de un ángulo.
- Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.
- Ecuaciones de la recta.

Trigonometría

Este artículo o sección necesita fuentes o referencias que aparezcan en una publicación acreditada, como libros de texto u otras publicaciones especializadas en el tema.



La **trigonometría** es una rama de las matemáticas de antiguo origen, cuyo significado etimológico es ("la medición de los triángulos"). *Se deriva del vocablo ← griego τριγωνο* <trigōno> *"triángulo" + μετρον* <metron> *"medida",*[1]

La trigonometría en principio es la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos. Para esto se vale de las razones trigonométricas, las cuales son utilizadas frecuentemente en cálculos técnicos. En términos generales, la trigonometría es el estudio de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Interviene directa o indirectamente en las demás ramas de la matemática y se aplica en todos aquellos ámbitos donde se requieren medidas de precisión. La trigonometría se aplica a otras ramas de la geometría, como es el caso del estudio de las esferas en la geometría del espacio.

Posee numerosas aplicaciones: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas de navegación por satélites.

Unidades angulares

En la medida de ángulos, y por tanto en trigonometría, se emplean tres unidades, si bien la más utilizada en la vida cotidiana es el Grado sexagesimal, en matemáticas es el Radián la más utilizada, y se define como la unidad natural para medir ángulos, el Grado centesimal se desarrolló como la unidad más próximo al sistema decimal, se usa en topografia, arquitectura o en construccion.

Radián: unidad angular natural en trigonometría, será la que aquí utilicemos, en una circunferencia completa hay 2π radianes.

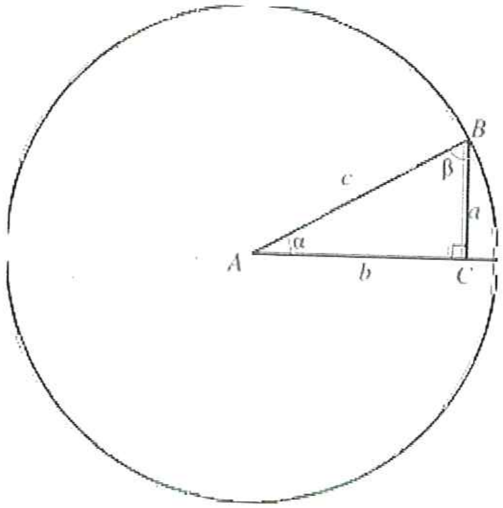
Grado sexagesimal: unidad angular que divide una circunferencia en 360º.

Grado centesimal: unidad angular que divide la circunferencia en 400 grados centesimales.

<u>EQUIVALENCIA ENTRE GRADOS Y RADIANES</u>

$$\frac{\text{Nº DE GRADOS}}{360} = \frac{\text{Nº DE RADIANES}}{2\pi}$$

Razones trigonométricas



El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones seno, coseno y tangente, del ángulo α, correspondiente al vértice **A**, situado en el centro de la circunferencia.

El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sinus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa,

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa,

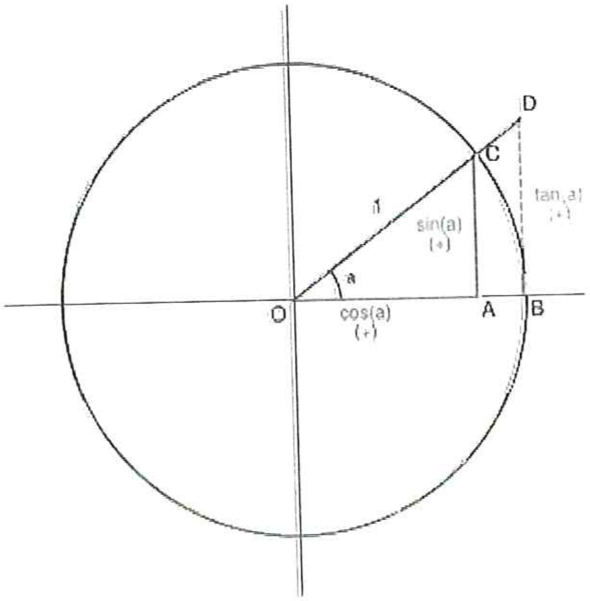
$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto y el adyacente,

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Es el cociente del seno entre el coseno.

Sentido de las funciones trigonométricas



Dados los ejes de coordenadas cartesianas **xy**, de centro **O**, y un círculo con centro en **O** y radio 1; el punto de corte de la circunferencia con el lado positivo de las **x**, lo señalamos como punto **B**.

La recta **r**, que pasa por **O** y forma un ángulo **a** sobre el eje de las **x**, corta a la circunferencia en el punto **C**, la vertical que pasa por **C**, corta al eje **x** en **A**, la vertical que pasa por **B** corta a la recta **r** en el punto **D**.

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}$$

La distancia $\overline{OB}$, es el radio de la circunferencia, en este caso al ser una circunferencia de radio = 1, y dadas las definiciones de las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(a) = \overline{AC}$$
$$\cos(a) = \overline{OA}$$
$$\tan(a) = \overline{BD}$$

tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} = \frac{\tan(a)}{1}$$

La tangente es la relación del seno entre el coseno, según la definición ya expuesta.

Resolución de triangulos rectángulos

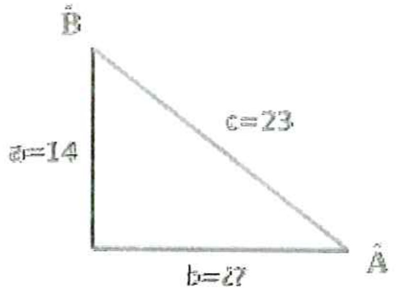
Cuando decimos resolver un triángulo nos referimos a que encontramos todas sus magnitudes desconocidas, es decir, la longitud de sus tres lados y la medida de sus tres ángulos, a partir de las conocidas.

Triángulos rectángulos

Si un triángulo es rectángulo en realidad ya sabemos una cosa, que tiene un ángulo de 90º, así que nos hará falta menos información para resolverlo. <u>Podemos resolver un triángulo rectángulo si conocemos</u>:

1º) <u>Dos lados</u>

Podemos calcular el tercer lado con el Teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$
Cuando sabemos lo que miden los tres lados es fácil encontrar los ángulos a partir de las razones trigonométricas y de la relación entre los ángulos de un triángulo.



<u>Ejemplo</u>

Tenemos este triángulo y sabemos que $a = 14$ y $c = 23$

$$b = \sqrt{23^2 - 14^2} = 18,25$$

$$\sin \hat{A} = \frac{14}{23} = 0,6087 \rightarrow \hat{A} = 37,5^\circ$$ (inverso seno $\hat{A}$)

$$\hat{B} = 180 - 90 - \hat{A} = 180 - 90 - 37,5 = 52,5^\circ$$

2º)<u> Un ángulo y un lado :</u> Los lados se calculan mediante la razón trigonométrica del ángulo que tenemos y con la longitud del lado que tenemos .El ángulo que nos falta se calcula recordando que los ángulos de un triángulo suman entre los tres 180º siempre.

Ejemplo : Tenemos un triángulo y conocemos $a = 29$ y $\hat{B} = 63^\circ$

196

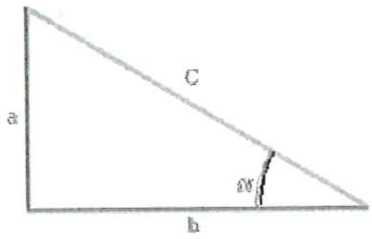
$$\tan \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow b = a \tan \hat{B} = 29 \tan 63 = 56,92$$

$\alpha = 90^\circ$

$\gamma = 27^\circ$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{29^2 + 56,92^2} = 63,88$$

Razones trigonométricas de un ángulo agudo



Si miramos el triángulo de la izquierda podemos describir tres razones que son intrínsecas de los ángulos agudos, ya que las razones sólamente dependen del ángulo α debido al teorema de Thales.

$$\sin\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \to \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

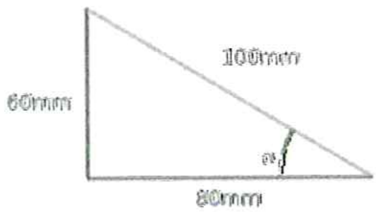
$$\cos\alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}} \to \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha} \to \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Gracias a estas definiciones podemos calcular razones trigonométricas aproximadamente dibujando y midiendo simplemente.

Estas razones trigonométricas evidentemente no dependen del triángulo que tracemos sólo dependen del ángulo.

[editar] Ejemplo



Tenemos un triángulo como el de la figura y queremos saber sus razones trigonométricas así que medimos sus tres lados a= 60mm b= 80mm c= 100mm

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{60}{100} = 0,6$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{80}{100} = 0,8$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{60}{80} = 0,75$$

EJERCICIOS DE TRIGONOMETRIA

1º) ¿A qué altura se puede llegar con una escalera de 3 metros colocando la base a 1 metro de la pared?.

2º) Un niño sujeta una cometa con una cuerda de 35m. La cometa está encima de un árbol que se encuentra a 20 metros del niño. ¿A qué distancia está la cometa?.

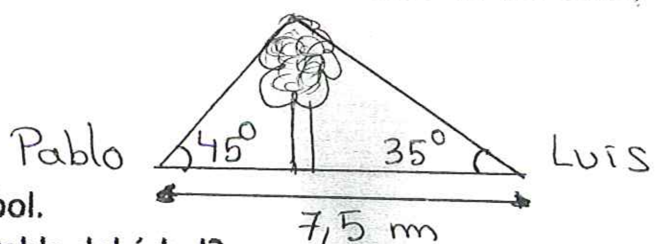
3º) Un árbol de 50 m de alto proyecta una sombra de 60 m de larga. Encontrar el ángulo de elevación del sol en ese momento.

4º) Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 4,8 cm y el ángulo opuesto a este cateto mide 54. Halla la medida del resto de los lados y de los ángulos del triángulo.

5º) En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

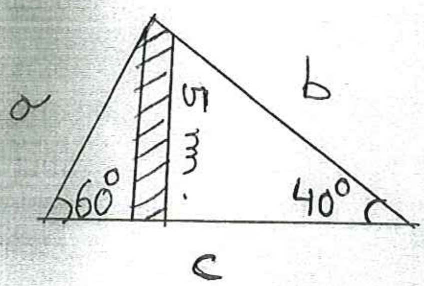
6º) Queremos fijar un poste de 3,5 m de altura, con un cable que va desde el extremo superior del poste al suelo. Desde ese punto del suelo se ve el poste bajo un ángulo de 40º. ¿A qué distancia del poste sujetaremos el cable? ¿Cuál es la longitud del cable?

7º) Pablo y Luis están situados cada uno a un lado de un árbol, como indica la figura:



a) Calcula la altura del árbol.
b)¿ A qué distancia está Pablo del árbol?

8º) Un mástil de 5 metros se ha ajustado al suelo con un cable como muestra la figura:



Halla el valor de c y la longitud del cable.

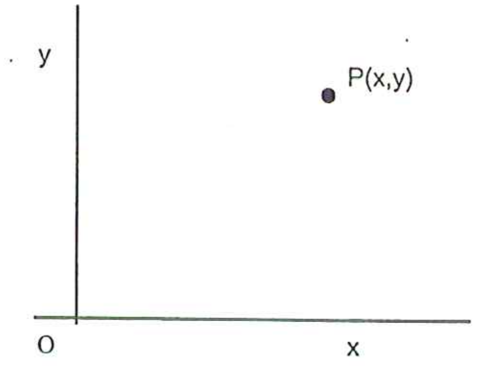
4. Geometría analítica plana

La Geometría analítica establece una interesante relación entre el Álgebra y la Geometría. En este tema nos limitaremos al estudio del plano, aunque parecidas conclusiones se pueden hacer extensibles al espacio.

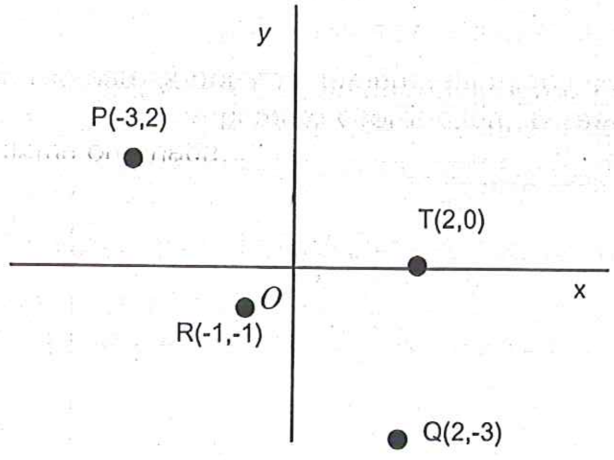
Sistema de referencia

El sistema de referencia cartesiano en el plano consta de dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O(0, 0). El eje horizontal OX es el eje de abscisas, y el vertical OY es el eje de ordenadas.

Cada punto del plano, P, se representa por dos números llamados coordenadas que representamos entre paréntesis, P(x, y). La primera coordenada, x, se llama abscisa, y la segunda coordenada, y, se llama ordenada.



Ejemplo: si tenemos los puntos P(-3,2), Q(2, -3), R(-1,-1) y T(2,0) su representación gráfica sería:



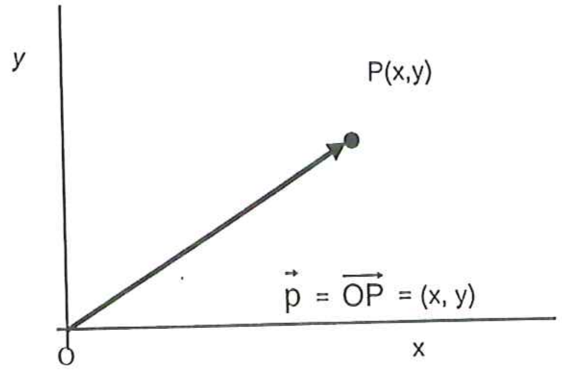
Coordenadas de un vector

Consideramos el vector $\vec{v}$ de origen $A(a_1, a_2)$ y extremo $B(b_1, b_2)$. Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ se obtienen restando a las coordenadas del punto extremo las del origen. Es decir las **coordenadas** del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ son $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

Ejemplo: Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$, donde A(2, -1) y B(3, 3), son estas (3 -2, 3+1) = (1, 4).

Vector de posición

Cada punto P(x, y) del plano se puede considerar determinado mediante las coordenadas de su vector de posición $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = (x, y)$.



Ejemplo: Las coordenadas del vector de posición del punto B (2,3) son $\overrightarrow{OB} = (2,3)$.

Punto medio de un segmento

Si las coordenadas de los extremos A y B de un segmento son $A(a_1,a_2)$ y las de $B(b_1,b_2)$ las coordenadas del punto medio serán: $\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$

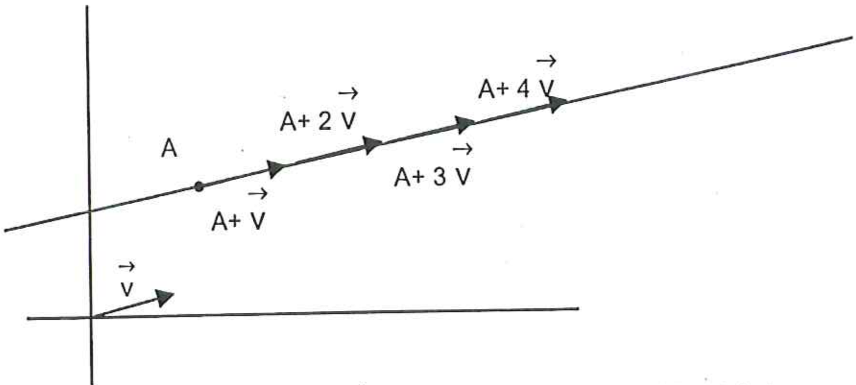
Ejemplo: si llamamos M al punto medio del segmento de extremos A(6,2) y B(-4,6) sus coordenadas son $M\left(\dfrac{6+(-4)}{2}, \dfrac{2+6}{2}\right) = (1,4)$.

Ecuaciones de la recta en el plano.

Una recta **r** queda determinada si conocemos las coordenadas de un punto y las de un vector paralelo llamado vector director.

Ecuación vectorial

Es de la forma $\overrightarrow{ox} = \vec{A} + t\vec{v}$ donde "o" es el origen de coordenadas, "x" es un punto cualquiera de la recta, "A" es un punto conocido de la recta, $\vec{v}$ es un vector director conocido y t es un parámetro. Al dar valores a t, obtendremos los distintos puntos X de la recta.



Ejemplo: La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (1, -1) y tiene por vector director al vector (3, 4) es: (x, y) = (1, -1) + t (3, 4). Son puntos de la recta (1,-1) si t=0; (4,3) si t=1; (7,7) si t=2; …

Ecuaciones paramétricas

Al sustituir en la ecuación vectorial los vectores por sus coordenadas obtenemos una expresión del tipo $(x, y)= (a_1, a_2)+ t(v_1, v_2)$. Expresando por separado cada coordenada se obtienen las llamadas ecuaciones paramétricas:

$$x = a_1 + t\, v_1$$

$$y = a_2 + t\, v_2,$$

Para cada valor que le demos a "t" se obtiene un punto (x, y) de la recta.

Ejemplo: En la recta anterior las ecuaciones paramétricas son: $x = 1 + 3t$; $y = -1 + 4t$. De igual forma que en el ejemplo anterior podemos calcular puntos de la recta.

También podemos comprobar que un punto pertenece a la recta si satisface su ecuación. Así el punto (4,3) se obtiene para t = 1, pero no hay un valor t que satisfaga la ecuación si el punto es el (0,0).

Ecuación continua

Se obtiene despejando t en cada una de las ecuaciones paramétricas e igualando los resultados obtenidos.

De $x = a_1+ t\, v_1$; $t = \dfrac{x - a_1}{v_1}$ y de $y = a_2+ t\, v_2$; $t = \dfrac{y - a_2}{v_2}$, por tanto:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

Observa que los denominadores son las coordenadas del vector director.

Ejemplo: En la misma recta anterior obtenemos la ecuación continua: $t = \dfrac{x-1}{3}$ y $t = \dfrac{y+1}{4}$, luego $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{4}$. Igualmente que en los casos anteriores podemos comprobar que (7,7) satisface la ecuación y por tanto pertenece a la recta $\dfrac{7-1}{3} = \dfrac{7+1}{4}$; 2 = 2, y que esto no ocurre para el punto (0,0): $\dfrac{0-1}{3} = \dfrac{0+1}{4}$; $\dfrac{-1}{3} \neq \dfrac{+1}{4}$

Ecuación general o implícita

Si en la ecuación continua eliminamos los denominadores se obtiene una única ecuación del tipo $v_2 (x - a_1) = v_1 (y - a_2)$. Si quitamos paréntesis y lo pasamos todo al primer miembro obtendremos una expresión como $v_2x - v_1y - v_2a_1 + v_1a_2 = 0$, que se puede escribir de la siguiente forma: $Ax + By + C = 0$, llamada ecuación general o implícita de la recta. Observa que A y B se corresponden con v_2 y v_1 respectivamente cambiando una de ellas de signo.

Ejemplo: En la recta anterior obtenemos la ecuación general o implícita: $4(x-1) = 3(y+1)$, $4x - 4 = 3y + 3$. Llegamos a la forma general $4x - 3y - 7 = 0$.

Podemos obtener puntos de esta recta dando valores a la x, y despejando la otra variable: si x = 0; y = -7/3; o al contrario, dando valores a la y, y despejando x: si y = 0 x = 7/4.

Ecuación explícita

Si se despeja y se llega a la ecuación explícita de la recta de la forma y = mx + n, donde "m" es la pendiente que indica la inclinación de la recta ($m = v_2/v_1$) y "n" es la llamada ordenada en el origen o "altura" a la que la recta corta al eje y.

Ejemplo: En la misma recta anterior obtenemos la ecuación explícita: $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$, donde

m es 4/3 y n es -7/3.

Esta ecuación se puede obtener también sustituyendo m por v_2/v_1 y calcular n teniendo en cuenta que el punto satisface la ecuación.

Ejemplo: En la misma recta anterior obtenemos la ecuación explícita a partir de los datos del vector director y del punto por el que pasa. m = 4/3: $y = \frac{4}{3}x + n$. Como el punto (1, -1) pertenece a la recta satisface la ecuación $-1 = \frac{4}{3} \cdot 1 + n$, de donde n es -7/3. La ecuación es $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$. Para obtener más puntos sólo hay que dar valores a la x. Así si x = 1; y = -1.

Pendiente de una recta en cualquiera de sus formas.

La pendiente indica la inclinación de la recta y viene dada por $m = v_2/v_1$ siendo v_1 y v_2 las coordenadas del vector director. En la forma explícita se corresponde con el valor de "m". En el resto de las formas se trata de identificar las coordenadas del vector director.

Ejemplo: En la ecuación vectorial de la recta (x, y) = (1, -1) + t (3, 4) las coordenadas del vector director son (3, 4), luego m = 4/3.

En la ecuación paramétrica de la recta $\left.\begin{array}{l} x = 2 - 5t \\ y = -1 + 6t \end{array}\right\}$ las coordenadas del vector director son (-5, 6), luego m = -6/5. En la ecuación continua de la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4}$ las coordenadas del vector son (3,4), luego m = 4/3. En la ecuación general de la recta 4x – 3y -7 = 0 las coordenadas del vector director son (3,4), luego m = 4/3. En la ecuación implícita de la recta y = -x + 7, el valor de la pendiente es m = -1

Recta determinada por dos puntos

Una recta puede quedar determinada por dos puntos del plano $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$. A partir de ellos podemos calcular el vector director considerando uno de los puntos como extremo y el otro como origen. Así $\vec{V} = \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. De esta forma queda reducido al caso anterior.

Ejemplo: Calculamos la ecuación explícita de la recta r que pasa por los puntos A(0, 3) y B(2, 2). El vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ tiene de coordenadas (2, -1), la ecuación de la recta que pasa por A y tiene como vector de dirección $\vec{v}$ se calcula como ya sabemos y en forma explícita es: $y = -1/2\ x + 3$. También se puede hacer resolviendo el sistema que resulta de considerar que los dos puntos satisfacen la recta que de forma general es $y = mx + n$.

Por pasar por A(0, 3)→ $3 = 0 + n$

Por pasar por B(2, 2) → $2 = 2m + n$

Resolviendo el sistema $m = -1/2$ y $n = 3$. Luego la recta es $y = -1/2\ x + 3$

Vector normal a una recta

Se trata del vector perpendicular a la recta. Un vector es perpendicular a $\vec{V} = (a, b)$ si sus coordenadas son (b, -a) o (-b, a).
En la recta en forma implícita $Ax + By + C = 0$ el vector (A, B) es normal a r.

Ejemplo. El vector (4,-3) es normal a la recta $4x - 3y - 11 = 0$.

Posición relativa de dos o más rectas

Dos rectas pueden ser secantes, si se cortan en un punto, o paralelas, si no se cortan. Un caso particular de rectas secantes son las rectas perpendiculares y un caso particular de rectas paralelas son las rectas coincidentes.

Cuando dos rectas son paralelas tienen la misma pendiente. Este es el motivo de que se pueda determinar una recta a partir de un punto y de la ecuación de otra recta a la que es paralela, ya que el vector director, el vector normal o la pendiente coincidirán.

Ejemplo. Calcula la recta que pasa por el punto A (0, 3) y es paralela a $2x - 3y - 4 = 0$.

En forma explícita $y = 2/3\ x - 4/3$. Por ser paralela comparte la pendiente y será de la forma $y = 2/3\ x + n$. Como pasa por A, este punto tiene que verificar la ecuación: $3 = 2/3 \cdot 0 + n$, $n = 3$, y la recta $y = 2/3\ x + 3$

En formas vectorial, paramétrica y continua

Si el vector (x_1, x_2) es un vector director de r:

Cualquier recta con vector dirección (x_1, x_2) o proporcional a él, (kx_1, kx_2), $k \neq 0$, es paralela a r o coincide con r.

Cualquier recta con vector dirección $(x_2, -x_1)$ o proporcional a él, $(kx_2, -kx_1)$, $k \neq 0$, es perpendicular a r.

Ejemplo. La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (0, -1) y tiene el vector de dirección (2, 4) es: $(x, y) = (0, -1) + t(2,4)$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 0 + 2t$$
$$y = -1 + 4t$$

Su ecuación continua es: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{4}$

La ecuación vectorial de una recta perpendicular a esta tendrá por vector director (4,-2). La recta perpendicular que pasa por (1, -1) es: $(x, y) = (1, -1) + t(4,-2)$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 1 + 4t$$

$$y = -1 + -2t$$

Su ecuación continua es: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-2}$

En forma explícita

Si consideramos las rectas r_1: $y = m_1x + n_1$ y r_2: $y = m_2x + n_2$ serán paralelas si $m_1 = m_2$ y perpendiculares si $m_1.m_2 = -1$, o, lo que es lo mismo, si $m_1 = -1/m_2$

Ejemplo. Las rectas $y = 3x + 6$ y la recta $y = 3x - 2$ son paralelas y las rectas $y = 4x + 5$ y la recta $y = -1/4x - 2$ son perpendiculares.

En forma general

Buscamos los puntos comunes a ambas rectas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{array}\right\}$$

El número de soluciones nos indica su posición relativa:

Una única solución: se cortan en un punto, son secantes. Se cumple $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$

No tiene solución: no tienen ningún punto común, son paralelas. Se cumple que $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} \neq \dfrac{C}{C'}$

Tiene infinitas soluciones: todos los puntos son comunes, son coincidentes. Se cumple $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'}$

Ejemplo. Estudia la posición relativa de la recta $x + y - 2 = 0$ y la recta $-2x - 2y + 6 = 0$. Al resolver el sistema que forman comprobamos que no tiene solución, luego son paralelas. Además $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{-2} \neq \dfrac{-2}{6}$

Ejemplo. Estudia la posición relativa de la recta $2x + y - 5 = 0$ y la recta $-2x - 2y + 6 = 0$. Al resolver el sistema que forman comprobamos que tiene una única solución, luego son secantes. Además $\dfrac{2}{-2} \neq \dfrac{1}{-2}$

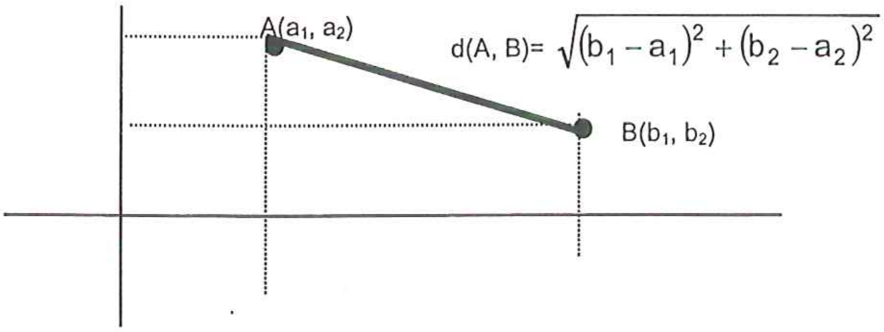
Ejemplo. Estudia la posición relativa de la recta $x + y - 3 = 0$ y la recta $-2x - 2y + 6 = 0$. A resolver el sistema que forman comprobamos que tiene infinitas soluciones luego son coincidentes. Además $\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{-2} = \dfrac{-3}{6}$

Distancias

Distancias entre dos puntos

Si tenemos dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ para calcular la distancia que los separa se aplica la siguiente fórmula basada en el Teorema de Pitágoras, como puedes comprobando observando la figura:

$$d(A, B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$



Ejemplo. La distancia entre los puntos A(0, -1) y B(3, 2) es

$$d(A, B)=\sqrt{(3-0)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

Distancia de un punto a una recta

En general, la distancia del punto $A(a_1,a_2)$ a la recta r: Ax + By + C = 0 es:

$$d\,(P, r)=\frac{|Aa_1+Ba_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejemplo. Calcula la distancia del punto A(0,3) a la recta r: 3x – y + 4 = 0.

$$d\,(P, r)=\frac{|0\cdot 3+3\cdot(-1)+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}u$$

Actividades resueltas

1. Calcula el punto medio del segmento de extremos A (1,-3) y B (3,4)

   Si llamamos M al punto medio del segmento de extremos sus coordenadas son $M\left(\frac{1+3}{2},\frac{-2+4}{2}\right)=(2,1)$

2. Calcula las ecuaciones vectorial, paramétricas, contínua, general y explícita de la recta que pasa por el punto (-1,3) y cuyo vector director es (-2,4). Calcula tres puntos de esta recta.

   Vectorial: (x, y) = (-1, 3) + t (-2, 4).

   Paramétricas: x = -1 - 2t

EJERCICIOS DE GEOMETRIA EN EL PLANO

1º) Hallar la recta que pasa por el punto (-2,2) y tiene como vector director el (1,-3).

2º) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (1,5) y tiene como vector director el (4,-3).

3º) Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por el punto (2,-1) y tiene el vector director (1,-4).

4º) Hallar la ecuación implícita de la recta que pasa por el punto (3,-2) y tiene como vector director el (4,3).

5º) Hallar dos puntos y un vector director de la recta $x + 3y - 6 = 0$

6º) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto (-2,0) y tiene el vector director (3,6).

7º) ¿Cuáles son la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto (3,1) y tiene vector director (-5,2) ?.

8º) Hallar la ecuación explícita de la recta cuya pendiente es 2/3 y la ordenada en el origen es -5.

9º) Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A (2,-3) y B (-1,4).

10º) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos A(-2,4) y B(3,4).

11º) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos A(0,4) y B(-3,5).

12º) Hallar la ecuación segmentaria de la recta que corte en los puntos (-3/5, 0) y (0 , 4/11) a los ejes de coordenadas.

13º) Hallar en forma segmentaria la ecuación de la recta $y = 2/3x - 7$

14º) Hallar en todas las formas posibles, la ecuación de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 - \lambda \\ y = 5 + \lambda \end{array}\right\}$$

15º) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta $5x + 2y - 6 = 0$

16º) Determinar el valor de "k" para que la recta $3x + ky = 3$ pase por el punto (-2,3).

EJERCICIOS SOBRE DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

1º) Hallar la distancia entre los puntos A(1,2) y B(2,4).

2º) Hallar la distancia entre los puntos A(10,-13) y B(-11,7).

3º) Hallar la distancia entre los puntos A(5,3) y B(-6,-2)

4º) Hallar la distancia entre los puntos A(2/3,1/10) y B(5/12,-1/2)

5º) Hallar dos puntos del eje "x" cuya distancia al punto A(-1,5) sea 13.

6º) Hallar un punto del eje "y" cuya distancia al punto A(-1,5) sea 13.

EJERCICIOS SOBRE DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

1º) Hallar la distancia del punto A(3,5) a la recta $x-3y+2=0$

2º) Hallar la distancia desde el punto A(2,6) a la recta $8x+y+4=0$

3º) Hallar la distancia del punto A(4,4) a la recta $2x+2y+4=0$

4º) Hallar la distancia del punto A(1,2) a la recta $2x+4y+3=0$

5º) Calcular la distancia entre el punto A(1,2) y la recta $4x+y-3=0$

6º) (EXAMEN) Dada la recta $3x-2y=7$ averiguar:

- El punto cuya abscisa es $x = 1$.
- El punto cuya ordenada es $y = -1/2$
- Su pendiente.

BLOQUE 3 : FUNCIONES Y GRÁFICAS

- Expresión de una función en forma algebraica a partir de enunciados.
- Aspectos globales de una función. Utilización como herramienta para resolver problemas y para su interpretación.
- Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones lineales, polinómicas, exponenciales.
- Operación y composición de funciones.

5. Funciones

En nuestra vida diaria a menudo nos encontramos ante situaciones del siguiente tipo: el precio que hemos de pagar por una misma cantidad de lapiceros dependerá del precio que tenga cada unidad; al consultar el precio del alquiler de un coche, vemos que éste depende del número de días y que la relación nos viene dada por una tabla como la siguiente:

Tiempo(días)	Precio(€)
1-3	45
4-6	60
7-10	80

El espacio recorrido por un móvil que lleva una velocidad constante de 150 km/h vendrá dado en función del tiempo que circule y lo calcularemos con la fórmula $e = 150t$.

Función

Las funciones estudian la relación existente entre dos variables. Se llama variable a cada una de las dos magnitudes que se relacionan entre sí. Se representan mediante las letras x e y , se denominan variable independiente (x) y variable dependiente (y).

Llamamos función a una relación entre dos variables, de tal forma que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente.

La relación existente entre dos magnitudes se puede expresar de varias formas:

Mediante una frase.

Ejemplo: a cada valor de la variable independiente le asignamos su doble

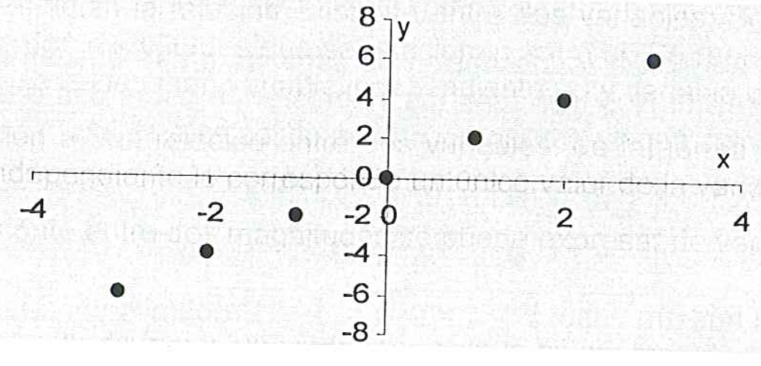
Mediante una tabla de valores.

Ejemplo:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2x	-6	-4	-2	0	2	4	6

Mediante una gráfica.

Ejemplo:



Algebraicamente, mediante una fórmula.

Ejemplo: $f(x) = 2x$

Dominio o campo de existencia

También llamado conjunto origen o conjunto inicial, se llama así al conjunto de valores de la variable independiente en los que la función está definida. Se representa por Dom(f).

Ejemplo: la función $f(x) = x^3$ asocia a cada número real su cubo. Como el cubo se puede calcular para todos los números reales diremos que Dom(f) = R.

Ejemplo: la función $f(x) = \frac{1}{x}$ asocia a cada número real su inverso. Como el inverso se puede calcular para todos los números reales excepto el 0, Dom(f) = R – {0}.

Ejemplo: la función $f(x) = \sqrt{x}$ asocia a cada número real su raíz cuadrada. Como no existe la raíz cuadrada de números negativos, Dom(f) = $[0,+\infty)$.

Estudiemos el cálculo de dominios de algunas funciones.

Cociente de polinomios. En este caso no forman parte del dominio de la función los valores de la x que anulan el denominador.

Ejemplo: en la función $f(x) = \frac{2}{x+3}$ el denominador se anula para x = -3 (x + 3 = 0), luego Dom(f) = R – {-3} o Dom(f) = $(-\infty,-3[U]-3,+\infty)$

Ejemplo: en $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-9}$ el denominador se anula para x = -3 y x = 3 (x^2 - 9 = 0), luego Dom(f) = R – {-3,3} o Dom(f) = $(-\infty,-3[U]-3,3[U]3,+\infty)$

Raíces de polinomios. En este caso no forman parte del dominio de la función los valores de la x que hacen negativo el radicando.

Ejemplo: en $f(x) = \sqrt{2x+1}$ el radicando se hace negativo para x < -1/2 (soluciones de 2x + 1 < 0), luego Dom(f) = $[-1/2,+\infty)$

Ejemplo: en $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ el radicando se hace negativo para -1 < x < 1 (soluciones de x^2 - 1 < 0), luego Dom(f) = $(-\infty,-1]U[1,+\infty)$.

Para resolver la inecuación de segundo grado buscamos los valores que la hacen 0. Nos interesan los valores entre estos dos o el resto y esto lo podemos decidir probando con uno de los valores intermedios.

-2	**-1**	0	**1**	2
+	**0**	-	**0**	+

En nuestro caso: x^2 - 1 = 0; x = ± 1. Probamos con un valor intermedio, como el 0. 0^2-1 = -1. Como este valor es negativo, el resto de valores forman el dominio de la función.

Ejemplo: en $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ hemos de eliminar del dominio los valores que anulan el denominador y los que hacen que el radicando sea negativo. Estos valores son $-1 \leq x \leq 1$ (soluciones de $x^2 - 1 \leq 0$), luego Dom(f) = $(-\infty,-1[U]1,+\infty)$.

Logaritmos. En este caso no forman parte del dominio de la función los valores de la x que hacen negativo o 0 el número al que estamos buscando el logaritmo.

Ejemplo: en la función $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ la expresión se hace negativa o nula para $-2 \leq x \leq 3$ (soluciones de $x^2 - x - 6 \leq 0$), luego Dom(f) = $(-\infty,-2[U]3,+\infty)$.

Para resolver la inecuación de segundo grado $x^2 - x - 6 = 0$; $x = -2$ y $x = 3$. Probamos con un valor intermedio, como el 0. $0^2 - 0 - 6 = -6$. Como este valor es negativo, el resto de valores forman el dominio de la función.

-3	**-2**	0	**3**	4
+	**0**	-	**0**	+

Rango o recorrido

También llamado conjunto final o conjunto imagen, se llama así al conjunto de valores de la variable dependiente que son imagen de algún elemento del dominio. Se representa por Im(f).

Ejemplo: 4 forma parte del rango de la función $f(x)=x^2$ pues existe al menos un valor de x que se transforma en 4 mediante esta función: $x^2 = 4$; $x = \sqrt{4} = \pm 2$, pero -4 no forma parte del rango de esta función pues no existe ningún valor de x que se transforma en -4 mediante esta función: $x^2 = -4$; $x = \sqrt{-4}$ no tiene solución.

Puntos de corte con los ejes

Un dato importante a la hora de representar gráficamente una función es el cálculo de los puntos de corte con los ejes.

Los puntos de corte con el eje y son de la forma (0, y), luego son aquellos puntos en los que la x vale 0. Para calcularlos solo tenemos que sustituir la x por 0 y calcular el valor de y correspondiente.

Ejemplo: la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$ corta al eje y en los puntos (0,-1) y en (0,1) ya que si $f(0) = \sqrt{2 \cdot 0+1} = \sqrt{1} = \pm 1$.

Los puntos de corte con el eje x son de la forma (x, 0), luego son aquellos puntos en los que la y vale 0. Para calcularlos solo tenemos que sustituir la y por 0 y calcular el valor de x correspondiente. A estos valores se les llama ceros de la función.

Ejemplo: la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$ corta al eje y en el punto de coordenadas (-1/2,0) ya que si $0 = \sqrt{2x+1}$; $x = -1/2$. Es el cero de la función.

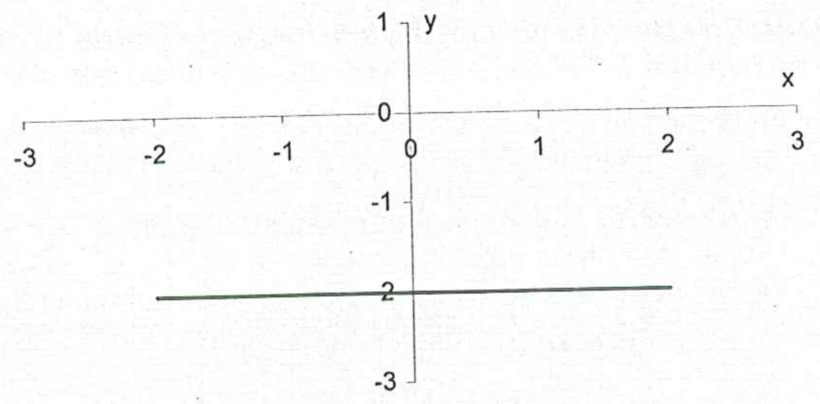
Representación gráfica de funciones

Función constante: f(x) = c, donde c es un número real.

El dominio es R y el único valor del recorrido es c.

Las gráficas de estas funciones son rectas paralelas al eje de las x o abscisas que pasan por el punto (0,c).

Ejemplo: la gráfica de f(x) = - 2 es



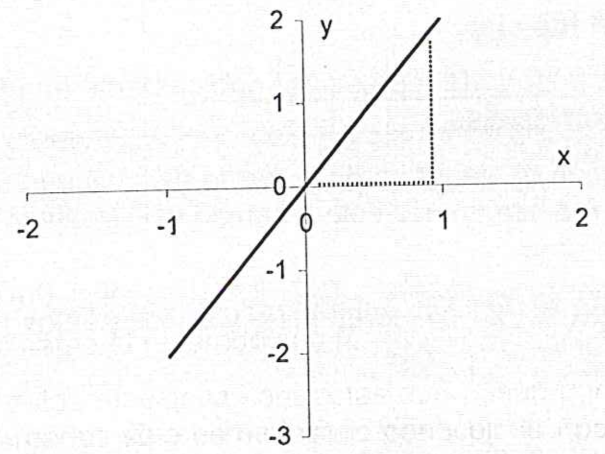
Función lineal: f(x) = ax

Tanto el dominio como el recorrido son R.

Las gráficas de estas funciones son rectas que pasan por el punto (0,0). Por ser rectas para representarlas solo es necesario conocer otro punto aparte del (0,0), situarlos en los ejes y unirlos mediante una recta.

Se puede comprobar que a coincide con la pendiente de la recta y es la variación de la variable dependiente cuando la variable independiente aumenta una unidad.

Ejemplo: f(x) = 2x. Pasa por el (0,0) y por (-1,-2). Observa la pendiente.



Al ser a la pendiente si a > 0 la recta será creciente, si a < 0 la recta será decreciente. Además si |a| = 1 la recta coincidirá con la bisectriz del primer y tercer cuadrante si es positiva, o con la del segundo y cuarto cuadrantes si es negativa; y si 0 < |a| < 1 tendrá menor inclinación que estas bisectrices y si |a| > 1 tendrá mayor inclinación que las bisectrices.

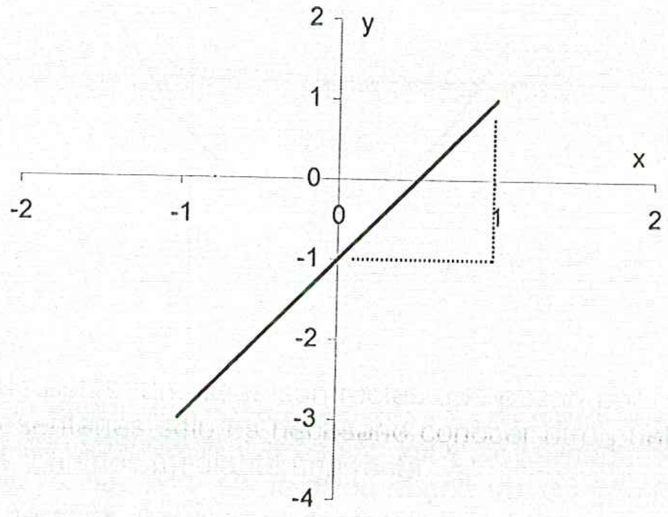
Función afín: f(x) = ax + b

Tanto el dominio como el recorrido son R.

Las gráficas de estas funciones son rectas que pasan por el punto (0,b). Por ser rectas para representarlas solo es necesario conocer otro punto aparte del (0,b), situarlos en los ejes y unirlos mediante una recta.

Se puede comprobar que a coincide con la pendiente de la recta y que b es el valor de la ordenada en el origen.

Ejemplo: $f(x) = 2x - 1$. Pasa por el (0,-1) y por (1,1). Observa la pendiente.



Las consideraciones hechas sobre la pendiente en la función lineal se mantienen en la función afín. Además se ha de tener en cuenta que las infinitas funciones afines y la lineal correspondiente que comparten la misma pendiente son paralelas entre sí.

Ejemplo: son funciones paralelas: $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = 2x$, $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = 2x - 5$, $f(x) = 2x + 1/4$, ...

Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$

El dominio es R y el recorrido dependerá de la situación del vértice y la orientación de las ramas.

Sus gráficas son unas curvas denominadas parábolas que se caracterizan por tener vértice y un eje de simetría paralelo al eje de ordenadas que pasa por el vértice.

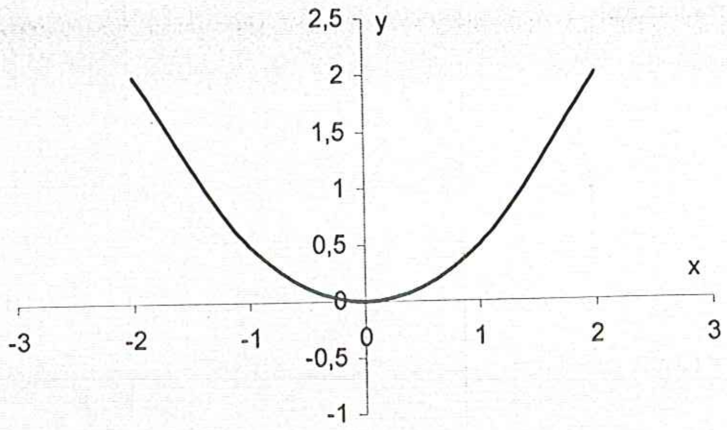
El coeficiente a determina la forma de la gráfica de una función cuadrática, si $a > 0$ las ramas van hacia arriba y si $a < 0$ las ramas hacia abajo. En ambos casos presenta un máximo o un mínimo respectivamente, que se corresponde con el vértice. Además si $|a| = 1$ la abertura de las ramas se considera mediana; si $0 < |a| < 1$ tendrán mayor abertura que la anterior y si $|a| > 1$ tendrá menor abertura.

Para representar gráficamente una función polinómica de 2º grado conviene hallar el vértice y los puntos de corte con los ejes.

Si la función es de la forma $f(x) = ax^2$ el vértice se encuentra en el (0,0) y es ahí donde corta a los ejes. Como es simétrica respecto a este punto calcularemos un par de puntos a un lado y podemos dibujarla.

Ejemplo: f(x)= $\frac{1}{2}x^2$ tendrá mucha abertura, ramas hacia arriba, vértice en el (0,0).

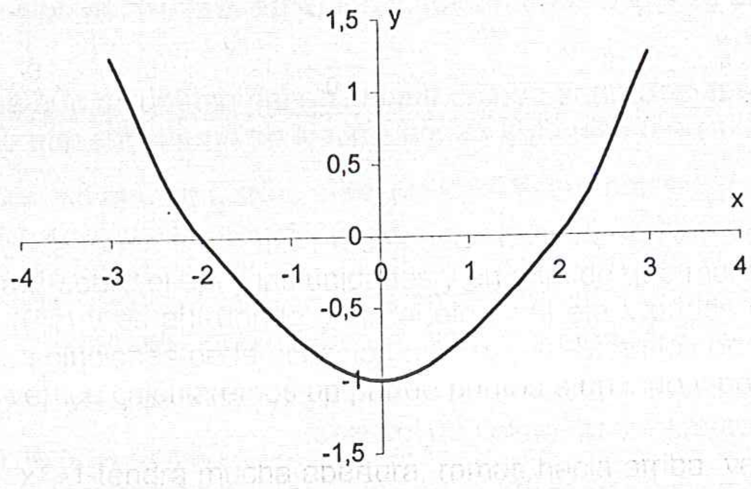
Calculamos dos puntos más a un lado del vértice: (2,2) y (1,1/2). Ya la podemos representar.



Si la función es de la forma $f(x) = ax^2 + c$ se puede considerar como una traslación de la función $f(x) = ax^2$ sobre el eje y las unidades y en sentido que marca c. El vértice se encuentra en el (0,c) y es ahí donde corta al eje y. Al eje x puede cortarlo o no dependiendo de las soluciones de la ecuación $ax^2 + c = 0$. Si no lo corta, como es simétrica respecto al vértice calcularemos un par de puntos a un lado y podemos dibujarla.

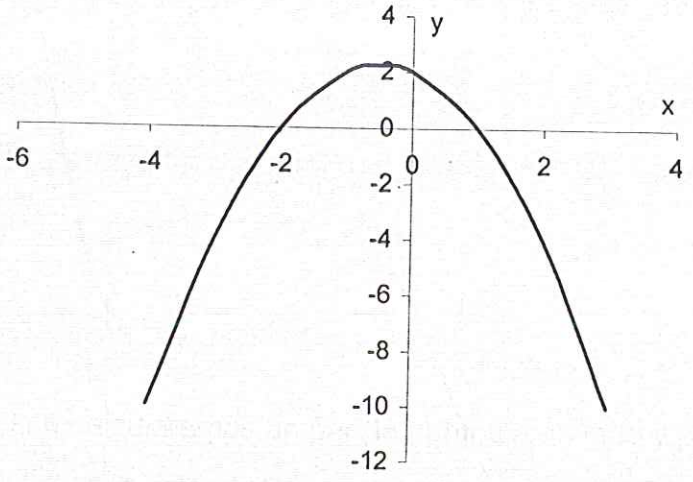
Ejemplo: f(x)= $\frac{1}{4}x^2-1$ tendrá mucha abertura, ramas hacia arriba, vértice en el (0,-1).

Calculamos los puntos de corte con el eje x: $\frac{1}{4}x^2-1 = 0$; $x = \pm 2$, luego corta en los puntos: (2,0) y (-2,0). Ya la podemos representar.



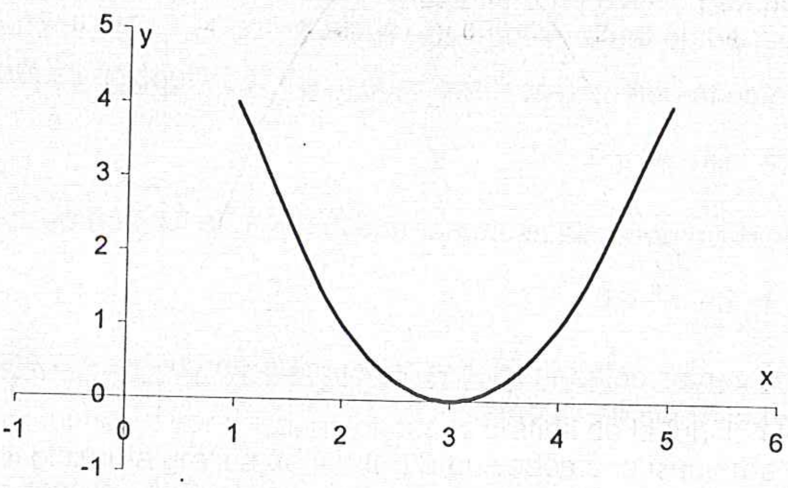
Si la función es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ el vértice se encuentra en el $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ y corta al eje y en el punto (0,c). Al eje x puede cortarlo o no dependiendo de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si no lo corta, como es simétrica respecto al vértice calcularemos un par de puntos a un lado y podemos dibujarla.

Ejemplo: f(x)= $-x^2 - x + 2$ tendrá abertura mediana, ramas hacia abajo, vértice en el (-1/2, 5/4). Calculamos los puntos de corte con el eje x: $-x^2 - x + 2 = 0$; x = -2 y x = 1, luego corta en los puntos: (-2,0) y (1,0). Corta al eje y en (0,2) Ya la podemos representar.



Si en y = f(x) sustituimos x por x + a, entonces la gráfica de la función y = f(x + a) es la resultante de desplazar la gráfica de y = f(x) a unidades a la izquierda y si sustituimos x por x - a, la gráfica de y = f(x - a) será la de y = f(x) desplazada a unidades hacia la derecha.

Ejemplo: si la función f(x) = x^2 tiene abertura mediana, ramas hacia arriba y vértice en (0,0), la función f(x) = $(x-3)^2$ es igual a la anterior pero con el vértice en (3,0).

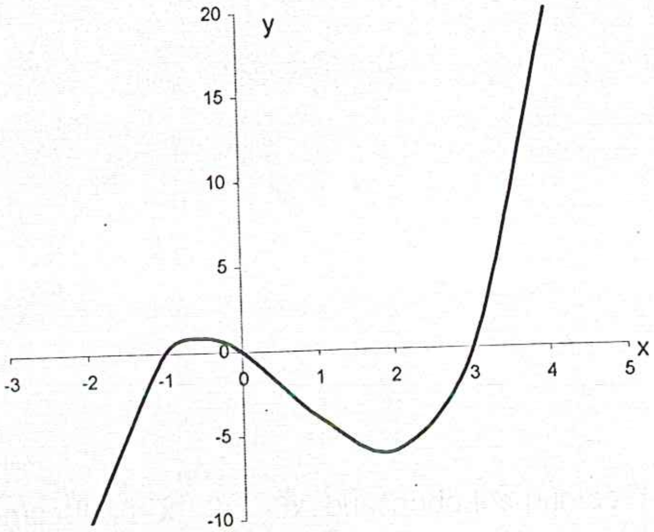


Función polinómica de grado 3: f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$

Tanto el dominio como el recorrido son R.

Para realizar las gráficas de estas funciones calculan los puntos de corte con los ejes y valores intermedios.

Ejemplo: representamos $f(x) = x^3 -2x^2 -3x$, buscando los puntos de corte con el eje x: $x^3 -2x^2 -3x = 0$; $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$, luego corta en (-1,0), (0,0) y (3,0). Al eje y lo corta en (0,0). Después calcularemos valores intermedios como (-2,-10), (-0'5,0'875), (1,-4) y (4,20). Situamos los puntos y dibujamos la gráfica.



Función exponencial: $f(x) = a^x$, siendo a un número real positivo y distinto de 1.

Estas funciones cumplen las siguientes propiedades:

Su dominio es R y el recorrido $]0,\infty)$.

Para x = 0, la función toma el valor 1: $f(0) = a^0 = 1$.

Para x = 1, la función toma el valor a: $f(1) = a^1 = a$.

La función es positiva para cualquier valor de x: $f(x) > 0$ ya que la base siempre es positiva, por lo tanto nunca corta al eje x.

Si la base de la potencia es mayor que 1, a > 1, la función es creciente.

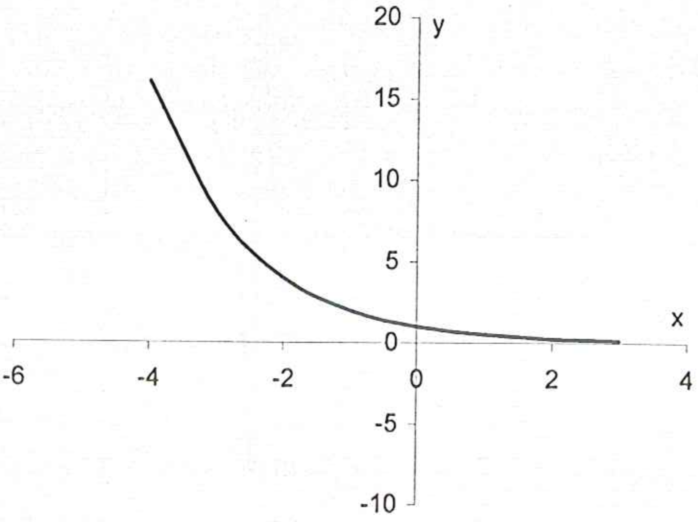
Si a > 1 → $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

Si la base de la potencia es menor que 1, a < 1, la función es decreciente.

Si a < 1 → $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

Para representar estas funciones tendremos en cuenta las anteriores propiedades y haremos una tabla de valores.

Ejemplo: la gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ será decreciente, pasará por los puntos (0,1) y (1,1/2). Otros valores son: (-4,16), (-3,8), (-2,4), (-1,2), (2,1/4), (3,1/8), (4,1/16). Los situamos y podemos representarla.



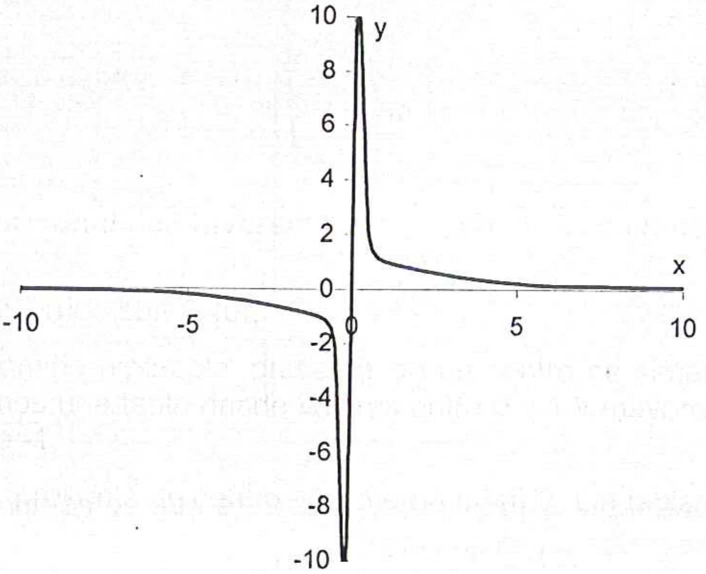
Función de proporcionalidad inversa: f(x) = $\frac{k}{x}$, donde k es un número real y k≠0.

Su Dominio y su recorrido son R-{0}.

Su gráfica se denomina hipérbola, presentando un centro de simetría en (0,0). Para realizarla elaboramos una tabla dando valores entre 0 y 1 y mayores que 1, y entre 0 y -1 y menores que -1.

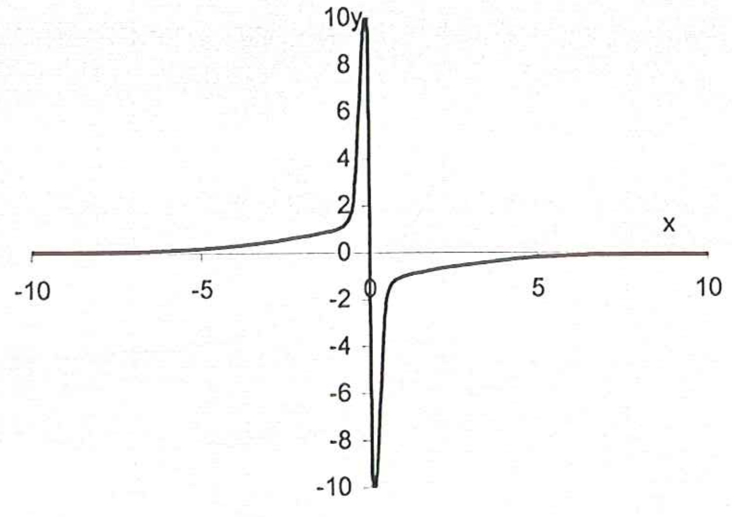
Ejemplo: f(x) = 1/x presenta un centro de simetría en (0,0) t la tabla de valores sería

x	0'25	0'5	2	5	10	-0'25	-0'5	-2	-5	-10
f(x)	4	2	0'5	0'2	0'1	-4	-2	-0'5	-0'2	-0'1



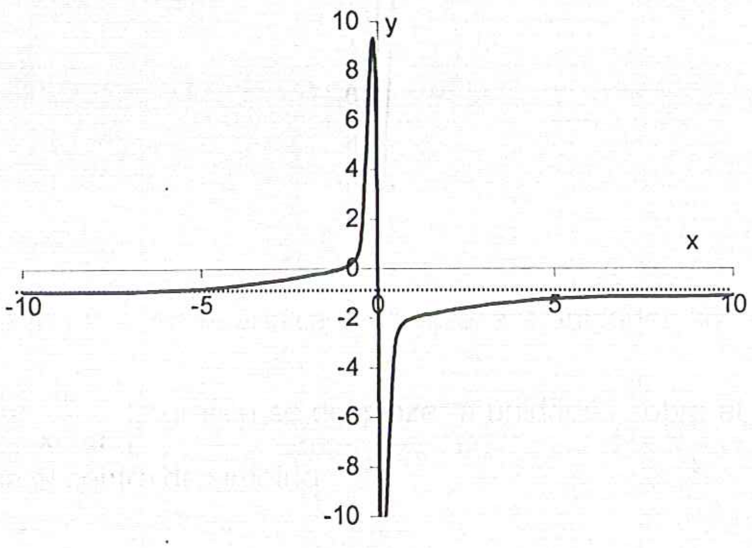
Si k es positivo la gráfica es decreciente y si k es negativo la gráfica resulta creciente.

Ejemplo: la gráfica de f(x) = -1/x es la siguiente



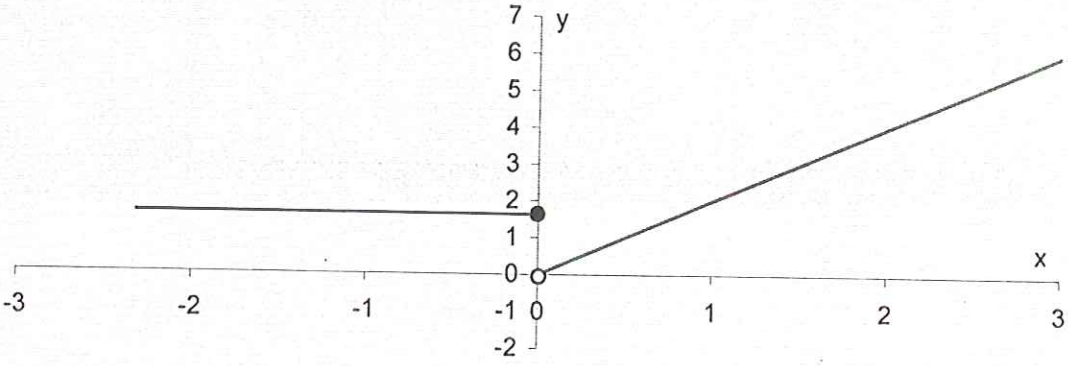
Si es de la forma f(x) = $\frac{k}{x}$+a la gráfica se desplaza a unidades sobre el eje y y si es de la forma f(x) = $\frac{k}{x+a}$ la gráfica se desplaza -a unidades sobre el eje x. En ambos casos se modifica el centro de simetría.

Ejemplo: la gráfica de f(x) = $\frac{-1}{x}-1$ presenta el centro de simetría en (-1,0) y es la siguiente



Funciones definidas a trozos: son funciones que se comportan de diferente forma en determinados tramos de su dominio.

Ejemplo: la gráfica de la función f(x)=$\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$ tiene dos partes, es una recta horizontal a la altura del 2 para valores menores o iguales a 0 y una recta lineal creciente de inclinación 2 en el resto. Observa los puntos que indican que en x = 0 se comporta como f(x) = 2 y no como f(x) = 2x.



Actividades resueltas

1. Calcula el dominio de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-2x-1}$

   Hay que eliminar del dominio los valores de x que anulan el denominador: $x^2 - 2x - 1 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Domf = R – {1+ $\sqrt{2}$, 1- $\sqrt{2}$ }.

2. En la función anterior comprueba si el valor -1/2 forma parte de su rango o recorrido.

   Hay que comprobar si existe algún valor de x que se transforme en -1/2: $\dfrac{2x-1}{x^2-2x-1} = \dfrac{-1}{2}$, resolviendo la ecuación se comprueba que x = 1 y x = -3, luego -1/2 sí que pertenece al rango de la función.

3. Calcula el dominio de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$.

   Como no hay ningún valor que anule el denominador Domf = R.

4. Calcula el dominio de la función $f(x) = \sqrt{3x+4}$

   Hay que eliminar del dominio los valores de x que hacen negativo el radicando: 3x + 4 < 0; x < -4/3. Domf = [-4/3, +∞).

5. Calcular el dominio de la función $f(x) = \dfrac{3x-5}{\sqrt{-x^2+25}}$.

   Hay que eliminar del dominio los valores de x que hacen negativo el radicando y los que anulan el denominador: $-x^2 + 25 = 0$; $x = \pm 5$. 5 y – 5 anulan el denominador. Los valores que hacen negativo el radicando son los valores del intervalo entre 5 y -5 o el resto. Probamos con el 0: $-0^2 + 25 = 25$, luego los valores del intervalo hacen positivo el radicando y el resto lo hacen negativo. Domf =]-5, 5[.

-6	**-5**	0	**5**	6
-	**0**	+	**0**	-

Ejercicios de la función lineal

Representa las funciones constantes

1 $y = 2$ **2** $y = -2$

Representa las rectas verticales

3 $x = 0$ **4** $x = -5$

Representa las funciones lineales

5 $y = x$ **6** $y = 2x$

Representa las funciones afines

7 $y = 2x - 1$ **8** $y = -2x - 1$

Representa las siguientes funciones, sabiendo que:

9 Tiene por pendiente 4 y pasa por el punto (-3, -2).

10 Pasa por los puntos A(-1, 5) y B(3, 7).

11 Pasa por el punto P(2, -3) y es paralela a la recta de ecuación $y = -x + 7$.

12 En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función a fin que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

13 Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

Ejercicios de la función cuadrática

Representa las funciones cuadráticas

1 $y = -x^2 + 4x - 3$

2 $y = x^2 + 2x + 1$

3 $y = x^2 + x + 1$

4 Una función cuadrática tiene una expresión de la forma $y = x^2 + ax + a$ y pasa por el punto (1, 9). Calcular el valor de a.

5 Se sabe que la función cuadrática de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (1,1), (0, 0) y (-1,1). Calcula a, b y c.

6 Una parábola tiene su vértice en el punto V(1, 1) y pasa por el punto (0, 2). Halla su ecuación.

7 Partiendo de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, representa:

1. $y = x^2 + 2$
2. $y = x^2 - 2$

8. Lanzamos en vertical una piedra hacia arriba y observamos su movimiento. Si le hemos imprimido una velocidad inicial de 20 m/s su ecuación de movimiento será $f(t) = 20t - 5t^2$, donde $f(t)$ es la altura alcanzada en metros por la piedra y "t" el tiempo transcurrido en segundos.

a) Representa gráficamente esta función.

b) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la piedra?.

c) ¿Cuánto tiempo tarda en caer de nuevo hasta la altura desde la cual se lanzó?.

PROBLEMAS APLICADOS A FUNCIONES

1º) El precio del jamón es 20€/kg, es decir 0,02€/gr. Determina la ecuación que nos expresa el dinero gastado (y) según los gramos de jamón que compremos y represéntala gráficamente. Calcula la cantidad de jamón que nos darán por 2,5 €.

2º) Por la recogida de agua en unas fuentes medicinales debemos pagar 20 céntimos de euro por el acceso al recinto y 5 céntimos por cada litro recogido. Calcula el precio de 25 litros de agua. Luego calcula los litros que nos darán por 2 € .

3º) (EXAMEN 2002) Una empresa de alquiler de vehículos, nos cobra por alquilar un turismo una cuota de 120 € más una cuota de 60 € por cada día alquilado. Otra empresa B nos cobra una cuota de 72 €/día.

a) Si alquilamos un coche para tres días. ¿Qué empresa seria más rentable?.
b) ¿Cuántos días serian necesarios para que las dos empresas nos cobraran lo mismo?.
c) Realiza una gráfica situando en el eje de abscisas (x) los días y en el de ordenadas (y) el coste de cada empresa, donde se vea que se juntan en el día calculado en el apartado b. (Ayuda: las funciones son rectas).

4º) (EXAMEN 2003) Una empresa se dedica a la fabricación de calculadoras de bolsillo, y en un día de producción realiza cierto número de unidades de un modelo, con un coste de 1 € la unidad. Los costes fijos de producción, independientemente de la fabricación, son de 3.200 €, y cada calculadora se vende por 6 €.

a) ¿Cuál debe ser la producción de ese día para que la empresa cubra los gastos?
b) ¿Cuál ha de ser la producción, si se han obtenido 3.000 € de beneficio?.

5º) (EXAMEN 2008) El coche A consume 7 litros por cada 100 km. El coche B consume 6 litros por cada 100 km. El coche B cuesta 2.000 € más que el coche A. Los dos utilizan el mismo tipo de gasolina, que cuesta 1 € por litro. ¿A partir de cuántos quilómetros recorridos resulta más rentable el coche B?.

INTERPOLACIÓN LINEAL

La interpolación es un procedimiento que permite aproximar los valores de un fenómeno, en situaciones que no pueden ser medidos directamente, a partir de algunos otros valores conocidos.

Para ello suponemos que el fenómeno se ajusta a una función que calcularemos a partir de los puntos conocidos.

Si utilizamos dos puntos la gráfica de la función que podemos calcular es una recta y hablamos de interpolación lineal.

Se debe tener en cuenta que utilizaremos de los valores conocidos, los más cercanos a los que hemos de aproximar.

Si calculamos valores fuera de los conocidos el procedimiento es el mismo, pero recibe el nombre de extrapolación.

EJERCICIOS

1º) Si sabemos que un coche sale de una ciudad a las 9h y que llega a su destino a las 16 h habiendo recorrido 560 km., calcular por interpolación lineal por qué kilómetro pasaba a las 12 h.

2º) La siguiente tabla muestra datos de varios países de la evolución del número de trasplantes de hígado:

Año	1990	1991	1992	1993
Trasplantes	5040	5326	6042	6649

Calcula el valor de interpolación del año 1991 a partir de los datos de 1990 y 1992. ¿Se parece el dato obtenido al real?. Interpreta tu respuesta.

3º) El peso en gramos de un tipo de frutas en función de su calibre o diámetro en centímetros viene dado en esta tabla:

Diámetro (cm)	3	5	8
Peso (g)	8	22	73

Calcula por interpolación el peso correspondiente a 3.5 cm. y por extrapolación con qué diámetro pesará 85 g.

4º) El precio de un viaje en autobús es función de los kilómetros recorridos. Así si son 30 km. Cuesta 4€, y 65 km. vale 7.5 €.

a) Hallar la función lineal que expresa el coste del billete en función de la distancia recorrida.

b) Calcula por interpolación el precio de 50 km.

c) Calcular, por extrapolación, el precio de 300 km.

d) Si el billete cuesta 25 €, ¿Cuántos kilómetros tiene el recorrido?.

5º) (EXAMEN 2003). A lo largo del tiempo, el número de habitantes de un municipio da la siguiente tabla de resultados:

Año	1970	1980	1990	2000
Habitantes	956	1210	1462	1730

a) Por interpolación, calcula la población en los años 1975,1985 y 1995.

b) ¿Cuál es el número de habitantes que posiblemente tendrá el municipio en el año 2010?.

c) ¿En qué año, aproximadamente, tendrá 2500 habitantes este municipio?.

6º) (EXAMEN 2001) . La siguiente tabla muestra datos de diversos países sobre la evolución del número de trasplantes de hígado:

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Número	5040	5326	6042	6649	7616	7900

Representa en una gráfica los valores del número de trasplantes en función del año. Calcula el valor de interpolación del año 1993 a partir de los datos de 1992 y 1994. ¿Se parece el dato obtenido al real?. Interpreta tu respuesta.

7º) (EXAMEN 2000). El precio de un viaje en tren es función de los kilómetros recorridos. Recorrer 57 km. Cuesta 285 ptas. Y 68 km. Vale 340 ptas. Se pide:

a) Encontrar la función lineal que expresa el coste del billete en función de la distancia recorrida.

b) Calcular, por extrapolación, el precio del billete, cuando la distancia es de 500km.

c) Si el billete cuesta 400 ptas., cuántos kilómetros tiene el recorrido?.