BLOQUE 4 : ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Estadística descriptiva unidimensional

- Variables discretas y continuas.
- Recuento y presentación de datos.Determinación de intervalos y marcas de clase.
- Elaboración e interpretación de tablas de frecuencias y gráficas de barras y sectores. Histogramas y polígonos de frecuencia.
- Cálculo e interpretación de los parámetos de centralización y de disperrsión usuales: media, moda, mediana, recorrido, varianza y desviación típica.

Probabilidad

- Experiencias aleatorias.
- Frecuencia y probabilidad.
- Probabilidad simple y compuesta.

7. Estadística

La Estadística es la parte de las Matemáticas que estudian una población para poder tomar decisiones con respecto a la misma.

Conceptos básicos

Población: el conjunto de elementos sobre el que vamos a hacer el estudio. Si es muy grande se trabajará con una muestra aleatoria.

Ejemplo: si queremos estudiar el número de hijos de las familias españolas, la población será el conjunto de familias españolas.

Muestra aleatoria: cualquier subconjunto representativo de toda la población, donde cada elemento de la población ha de tener la misma probabilidad de ser elegido.

Ejemplo: en el caso anterior elegiremos al azar 100 familias de cada comunidad autónoma y distribuidas entre los municipios de dicha comunidad.

Variable estadística: es la propiedad que queremos estudiar en la población. Puede ser cualitativa si no es susceptible de ser medida o cuantitativa si se puede medir y expresar su valor numéricamente.

Ejemplos: variables cualitativas son el color del pelo, el estado civil, la profesión,... Variables cuantitativas son el peso, la longitud, el sueldo,...

Las variables cuantitativas, a su vez, pueden ser discretas si sólo admiten un número finito de valores, o continua si, al menos teóricamente, pueden tomar todos los valores posibles dentro de un intervalo.

Ejemplos: variables cuantitativas discretas son el número de hijos, número de piezas vendidas, número de coches,... Variables cuantitativas continuas son el peso, la longitud, la temperatura, ...

Los valores de las variables estadísticas se acostumbran a representar por $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

Ejemplo: si hemos estudiado el número de hijos de una muestra de 20 familias y los resultados han sido 5,0,1,2,2,3,4,1,2,0,1,1,3,0,1,1,2,6,1,5, Se trata de una variable cuantitativa discreta que puede tomar los valores

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, \ldots, x_{10} = 6 .$$

Frecuencia absoluta de un valor x_i: es el número de veces que aparece dicho valor en el estudio. Se representa como f_i.

Ejemplo: en el ejemplo anterior la frecuencia absoluta de $x_1 = 0$ es 3 porque hay 3 familias con 0 hijos, luego $f_1 = 3$.

Frecuencia relativa de un valor x_i: es el cociente del número de veces que aparece dicho valor en el estudio entre el total de los casos. Se representa como h_i.

Ejemplo: en el ejemplo anterior la frecuencia relativa de $x_1 = 0$ es 3/20 = 0'015 porque hay 3 familias con 0 hijos de un total de 20 familias, luego h_1 = 0'015.

Frecuencia acumulada de un valor x_i: es la suma de las frecuencias absolutas de los valores anteriores y del mismo valor. Se representa como F_i.

Ejemplo: en el ejemplo anterior la frecuencia absoluta de $x_3 = 2$ es 14 porque hay 14 familias con 0, 1 o 2 hijos, luego $F_3 = 14$.

Tablas estadísticas

Los datos obtenidos acerca de la muestra se representan en tablas estadísticas. Las tablas más básicas son las que presentan en diferentes columnas los x_i y las f_i. A veces es interesante también la columna de las h_i y las F_i.

Ejemplo: en el caso del ejemplo anterior una tabla con los x_i, las f_i. y las F_i quedaría:

x_i	f_i	F_i
0	3	3
1	7	10
2	4	14
3	2	16
4	1	17
5	2	19
6	1	20
Total	20	

Clases: son los intervalos que se crean en la variable cuando es continua o discreta pero con un elevado número de valores diferentes. En este caso como valor representativo del intervalo x_i se toma el punto medio al que se denomina marca de clase.

Ejemplo: Se han recogido los siguientes datos sobre el número de días de lluvia que se han producido a lo largo de 36 meses y los resultados han sido:

3, 2, 11, 13, 4, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 3, 2, 5, 6, 27, 15, 4, 21, 12, 4, 3, 6, 29, 13, 6, 17, 6, 13, 6, 5, 12, 26.

Una posible tabla de datos agrupados para esta distribución sería:

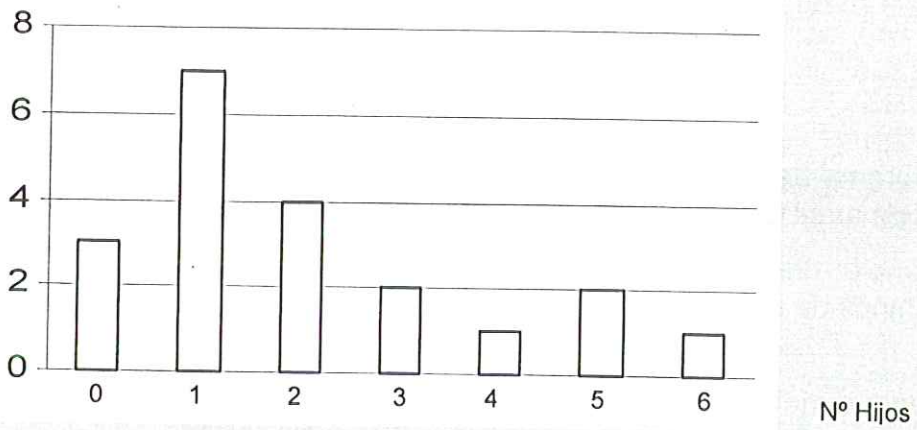
Clases	Marca de clase-x_i	f_i	F_i
[0,5)	2'5	13	13
[5,10)	7'5	11	24
[10,15)	12'5	6	30
[15,20)	17'5	2	32
[20,25)	22'5	1	33
[25,30)	27'5	3	36
		36	

Gráficas

Las gráficas permiten transmitir la información de los gráficos de una forma más clara.

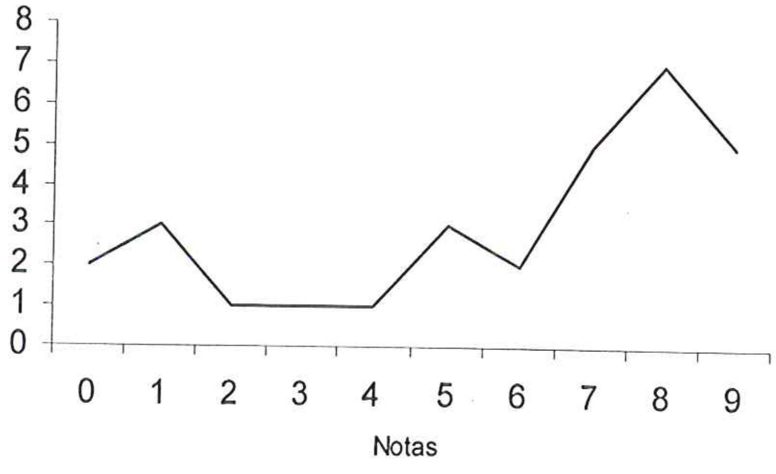
Diagramas de barras: se representan sobre el eje de abcisas los valores de la variable y sobre el eje de ordenadas las frecuencias. Después se levantan sobre cada valor de la variable barras cuya longitud coincida con la frecuencia correspondiente. Se utiliza en variables cualitativas o discretas.

Ejemplo: el diagrama de barras correspondiente al nº de hijos del ejemplo anterior sería:



Polígono de frecuencias: se elaboran como los diagramas de barras, pero uniendo los puntos que señalan el valor de la frecuencia mediante una línea poligonal. También se utiliza en variables cualitativas o discretas.

Ejemplo: polígono de frecuencias correspondiente a las notas (de 0 a 9) obtenidas por los alumnos de un grupo.



Histograma: se utilizan para distribuciones de variable estadística continua o discreta con un gran número de datos que se han agrupado en clases. Se representan sobre el eje de abscisas los límites de las clases. Sobre dicho eje se construyen unos rectángulos que tienen por base la amplitud del intervalo; siempre la misma, y por altura la frecuencia absoluta de cada intervalo.

Ejemplo: histograma correspondiente al estudio de la edad de los pacientes recibidos en una consulta médica a lo largo de un mes.

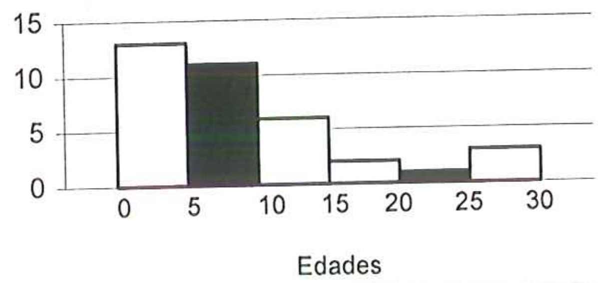
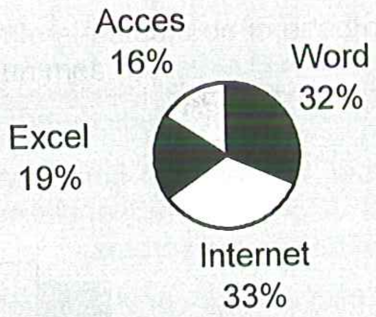


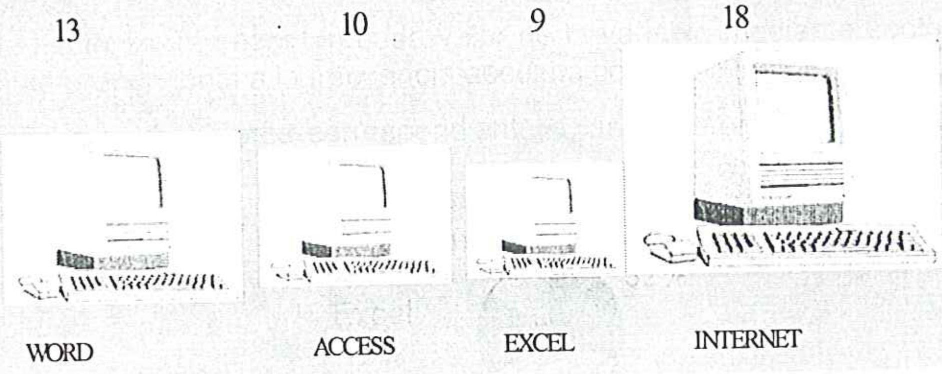
Diagrama de sectores: representan cada valor de la variable mediante sectores circulares de amplitud proporcional a la frecuencia absoluta correspondiente.

Ejemplo: diagrama de sectores correspondiente a las preferencias informáticos de los alumnos de un curso.



Pictogramas: se representan mediante dibujos alusivos al tema estudiado cuyo tamaño varía en función de la frecuencia correspondiente.

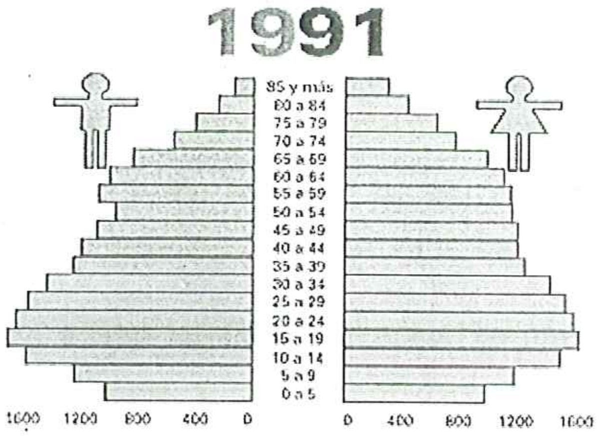
Ejemplo: el anterior ejemplo podría quedar así:



Otros gráficos muy utilizados en las ciencias sociales son los cartogramas que se realizan sobre un mapa, señalando sobre determinadas zonas, con distintos fondos, lo que se trata de poner de manifiesto (renta per cápita, densidad de población,...).

También muy conocidos son las pirámides de población consistentes en dos histogramas, uno para los datos referidos a los hombres y el otro para las mujeres, distribuidos por edades y dispuestos horizontalmente enfrentados por sus bases. Indican la evolución de una población.

Ejemplo: pirámide de población correspondiente a 1991 según el INE:



Parámetros estadísticos

Se llama **medidas de centralización** a las medidas o parámetros que, tienden a situarse hacia el centro del conjunto de datos ordenados. Las más importantes son: media, moda, mediana. Nosotros nos centraremos en el estudio de la media.

Se llama media de una variable estadística a la media aritmética de todos los datos, es decir a la suma de todos los valores de la variable dividida por el número de valores. Se representa por $\overline{x}$. Veamos cómo se realiza su cálculo:

Sea X una variable estadística que toma los valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, con frecuencias absolutas $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, respectivamente, la media viene dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Para facilitar el cálculo de los sumatorios los datos se disponen en tablas estadísticas.

Ejemplo: Calcula la media de la siguiente distribución correspondiente a las notas obtenidas por 40 alumnos en Matemáticas.

Calificaciones	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº de alumnos	2	2	4	5	8	9	3	4	3

Se elabora la tabla correspondiente y se procede al cálculo:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
1	2	2
2	2	4
3	4	12
4	5	20
5	8	40
6	9	54
7	3	21
8	4	32
9	3	27
	40	212

$$\overline{x} = \frac{212}{40} = 5,3$$

Si la variable es continua, o discreta con los datos agrupados en clases, se toman como valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, las marcas de clase.

Ejemplo: Estudiamos el número de bombillas defectuosas en 88 pedidos. Calcula la media si los resultados obtenidos han sido los siguientes:

Bomb. defec.	[38,44)	[44,50)	[50,56)	[56,62)	[62,68)	[68,74)	[74,80)
Nº pedidos	7	8	15	25	18	9	6

Se elaboran las tablas añadiendo la columna de las marcas de clase:

$\frac{38+44}{2}$

Clases	Marca	f_i	$x_i \cdot f_i$
[38,44)	41	7	287
[44,50)	47	8	376
[50,56)	53	15	795
[56,62)	59	25	1475
[62,68)	65	18	1170
[68,74)	71	9	639
[74,80)	77	6	462
		88	5204

$$\bar{x} = \frac{5204}{88} = 59{,}1$$

Cuando el peso de todos los valores no es el mismo se habla de media ponderada.

Ejemplo: Si la nota de un examen de matemáticas se saca a partir de los resultados de la prueba teórica que aporta el 40% de la puntuación y la práctica que supone el 60%, calcula la nota que obtendrá un alumno que tiene un 4 en la parte teórica y un 6'5 en la práctica.

$$\bar{x} = \frac{40 \cdot 4 + 60 \cdot 6'5}{100} = 5'5$$

La media es el parámetro de centralización que tiene en cuenta todos los datos. Sus inconvenientes son que los valores extremos distorsionan su valor y que no se puede calcular para variables cualitativas o si alguna de las clases es abierta, por ejemplo si en una distribución todas las clases fueran de una amplitud de 10 años y la última clase fuese para mayores de 60 años.

La mediana es el valor que ocupa la posición central después de haber ordenado todos los valores, por esto sólo se puede aplicar, igual que la media, en variables cuantitativas. Si el número de valores es par se tomará como mediana a la media de los dos valores centrales. Suele representarse por Me.

Ejemplo: En una oficina los sueldos de 5 empleados son: 700 €, 800 €, 700 €, 7.500 € y 1.000 €. Para calcular la mediana en primer lugar hay que ordenarlos y será el valor que ocupe la posición central: 700€, 700€, 800€,1.000€ y 7.500 €. Como son 5 al dividir entre dos quedan 2 a cada lado y uno en el centro que es la mediana. Me = 800 €.

Ejemplo: si los sueldos son 700 €, 800 €, 1.000 € y 7.500 €, la mediana será la media de los dos valores centrales: $Me = \frac{800 + 1.000}{2} = 900$ €.

Si los datos están agrupados por sus frecuencias, para calcular la mediana hay que añadir la columna de frecuencias acumuladas y localizar así el valor que ocupa la posición central.

Ejemplo: para calcular la mediana en la siguiente distribución hemos añadido la columna de frecuencias acumuladas F_i.

x_i	f_i	F_i
0	3	3
1	7	10
2	4	14
3	2	16
4	1	17
5	2	19
6	1	20
Total	20	

$14 > 10$

$\frac{20}{2} = 10$

Como son 20 datos los que ocupan las posiciones centrales son el 10º y el 11º que como se ve en la tabla se corresponde con 2 y 2, luego $Me = \frac{2+2}{2} = 2$

Si los datos están agrupados por sus frecuencias y en intervalos, para calcular la mediana hay que añadir la columna de frecuencias acumuladas y localizar así el intervalo en el que se encuentra el dato que ocupa la posición central. Una buena aproximación de la mediana es la marca de clase del intervalo mediano.

Ejemplo: para calcular la mediana en la siguiente distribución hemos añadido la columna de frecuencias acumuladas F_i.

Clases	Marca de clase-x_i	f_i	F_i
[0,5)	2'5	13	13
[5,10)	7'5	11	24
[10,15)	12'5	6	30
[15,20)	17'5	2	32
[20,25)	22'5	1	33
[25;30)	27'5	3	36
		36	

$24 > 18$

$\frac{36}{2} = 18$

Como son 36 datos los que ocupan las posiciones centrales son el 18º y el 19º que como se ve en la tabla se encuentran en el intervalo [5,10). Podemos tomar como mediana la marca de clase de este intervalo: Me = 7'5

La moda es el dato que más se repite. Se puede aplicar en todos los tipos de variables y es la única medida central que se puede calcular si la variable es cualitativa. Se representa como Mo. Puede existir más de una moda en un mismo estudio.

Ejemplo: en la oficina donde los sueldos de sus 5 empleados son 700 €, 800 €, 700 €, 7.500 € y 1.000 €, la moda es Mo = 700

Si los datos están agrupados por sus frecuencias se corresponde con el dato que presenta mayor frecuencia y en datos agrupados en intervalos se llama clase modal a la clase que presenta mayor frecuencia.

Ejemplo: la moda en la distribución de abajo es 1 al ser el dato que más se repite por tener la mayor frecuencia. Mo = 1

x_i	f_i
0	3
1	7
2	4
3	2
4	1
5	2
6	1

Se llama **medidas de dispersión** a las medidas o parámetros que miden las desviaciones de todas las puntuaciones respecto de la media.

Ejemplo: Si tenemos estas dos distribuciones:

A	4	4	5	5	5	5	6	6
B	1	1	2	5	5	8	9	9

La media en ambas distribuciones es 5 pero en A las notas están concentradas alrededor de la media y en B son mucho más dispersas. Los parámetros de dispersión nos miden el grado de variación de los datos con respecto a la media

Las más importantes son: recorrido, varianza y desviación típica.

Recorrido es la diferencia entre el mayor dato y el menor. Es fácil de calcular pero solamente informa de entre qué valores se mueve la variable, no de su organización a lo largo de este recorrido, si hay muchos iguales, si hay muchos valores extremos...

Ejemplo: el recorrido en la distribución de abajo es 6 – 0 = 6 al ser 6 el valor del dato mayor y 0 el del menor.

x_i	f_i
0	3
2	4

4	1
6	1

Se llama varianza de una variable a la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media, siendo estas desviaciones las diferencias entre cada valor de la variable y la media: $x_1 - \overline{x}$, $x_2 - \overline{x}$, $x_3 - \overline{x}$, ..., $x_n - \overline{x}$. Se representa por s^2.

Se llama desviación típica de una variable a la raíz cuadrada positiva de la varianza. Se representa por s.

Sea una variable estadística que toma los valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, con frecuencias absolutas $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$, respectivamente, la varianza viene dada por:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 \cdot f_1 + (x_2 - \overline{x})^2 \cdot f_2 + ... + (x_n - \overline{x})^2 \cdot f_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Los cálculos que implica esta fórmula son muy complejos y se simplifican utilizando la siguiente expresión equivalente:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \overline{x}^2$$

La desviación típica viene dada por la raíz cuadrada positiva de dicha expresión.

Ejemplo: Calcula la varianza y la desviación típica en el ejemplo de las calificaciones de 40 alumnos:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	2	2	2
2	2	4	8
3	4	12	36
4	5	20	80
5	8	40	200
6	9	54	324
7	3	21	147
8	4	32	256
9	3	27	243
	40	212	1296

$\overline{x} = \frac{212}{40} = 5'3$

$s^2 = \frac{1296}{40} - (5'3)^2 =$

$= 4'31$

$s = \sqrt{4'31} = 2'08$

En variables con datos agrupados se han de utilizar las marcas de clase como x_i.

La media, se suele situar cerca del centro de la distribución cuando esta es simétrica o ligeramente asimétrica. En estros casos el intervalo $\left(\overline{x}-s, \overline{x}+s\right)$ contiene al 68% de los datos, el intervalo $\left(\overline{x}-2s, \overline{x}+2s\right)$ el 95% de los datos y el intervalo $\left(\overline{x}-3s, \overline{x}+3s\right)$ el 98% de los datos.

El coeficiente de varización de Pearson permite comparar el nivel de dispersión de dos muestras. Se calcula como cociente entre la desviación típica y la media, siendo por tanto la expresión de la proporción de desviación que supone la desviación típica de la media.

$$CV = \frac{s}{\overline{x}}$$

Se puede expresar en forma de porcentaje multiplicando el resultado por 100.

Ejemplo: Compara dónde existe mayor desviación relativa, en una distribución con $\overline{x_1} = 4$ y $s_1 = 2$ o en otra distribución con $\overline{x_2} = 100$ y $s_2 = 100$. Calculamos el CV en ambos casos: $CV_1 = 2/4 = 0'5$ y $CV_2 = 20/100 = 0'2$. La desviación en la primera es menor en términos absolutos pero mucho mayor en términos relativos: 50% frente al 20%.

Se llama **medidas de posición** o **cuantiles** a los valores que dividen a la distribución en un número determinado de partes. Los más utilizados son los percentiles. Se trata de 99 valores que dividen la distribución en cien partes. Se representan como Pi.

Ejemplo: en la distribución de abajo el P_{20} es el valor que deja por debajo el 20% de los datos. Como son 20 datos el 20% de 20 son 4. Como se puede ver en la columna de las frecuencias acumuladas el valor es un 1, luego $P_{20} = 1$.

x_i	f_i	F_i
0	3	3
1	7	10 ←
2	4	14
3	2	16
4	1	17
5	2	19
6	1	20
Total	20	

10 > 4
3+1-4

Además están los cuartiles (tres valores que dividen la distribución en cuatro partes) que se representan como C_i, los quintiles (cuatro valores que dividen la distribución en cinco partes) que se representan como Q_i, los deciles (nueve valores que dividen la distribución en cuatro partes) que se representan como D_i,y la mediana (Me), que también se puede considerar un cuantil, que divide la distribución en dos partes.

Existe relación entre los diferentes cuantiles y así podemos decir que $Me = D_5 = C_2 = P_{50}$, o también que $Q_2 = D_4 = P_{40}$...

ESTADÍSTICA

Medidas de Centralización: nos sirven para ver la tendencia más común de una población. Hay tres medidas.

1ª- **Media:** la media de una variable estadística es el cociente obtenido al dividir la suma de todos sus valores por el número de datos.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot f_i}{N}$$

x_i ---- valores de la variable x

f_i ---- frecuencia (número de veces que se repite x_i)

N ----- número de datos en total. $= \sum_{i=1}^{N} f_i$

2ª- **Moda:** es el valor que aparece con más frecuencia.

3ª- **Mediana:** es el dato que deja tantos valores por encima como por debajo de él. Es el dato cuya frecuencia supera a la mitad de las frecuencias acumuladas.

Medidas de Dispersión: estas medidas nos sirven para medir lo agrupados que están los datos. Hay cuatro medidas.

1ª- **Recorrido o Rango:** es la diferencia entre el dato mayor y el menor de la variable.

2ª- **Desviación Media:** es la media aritmética de las desviaciones en valor absoluto; siendo las desviaciones con respecto a la media las diferencias entre cada valor de la variable y su media ($x_i - \bar{x}$).

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{N} | x_i - \bar{x} |}{N}$$

N ---- número de datos totales.

3ª- **Varianza:** es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones de todos los datos respecto a la media. Cuanto mayor es la varianza más dispersos estarán los datos.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

4ª- **Desviación Típica:** es la raíz cuadrada positiva de la varianza. $\rightarrow S = +\sqrt{S^2}$

5º- Coeficiente de Variación de Pearson $\rightarrow CV = \frac{S}{\bar{X}}$

Compara el nivel de dispersión de 2 muestras.

EJERCICIOS DE ESTADÍSTICA

Ejercicios de Medidas de Centralización

1º- Supongamos que hay dos alumnos que han sacado las siguientes notas de matemáticas a lo largo del curso.Calcula la nota media de cada uno de ellos.
Alumno A: 3,1,4,5,7,4.
Alumno B: 3,4,6,6,7,4.

2º- En una clínica han nacido 150 bebés con los pesos siguientes en kilos:
[2-2.5)----------------- 21 bebés
[2.5-3)----------------- 22 "
[3-3.5)----------------- 33 "
[3.5-4)----------------- 31 "
[4-4.5)----------------- 35 "
[4.5-5)----------------- 8 "
Halla el peso medio de esos 150 bebés.

3º- En una biblioteca se pregunta qué tipo de libros se han leído en la última semana, obtenemos los siguientes datos:
Policíaco------------ 10
Aventura------------ 11
Científico----------- 12
Novela-------------- 25
Histórico------------ 6
¿Cúal es la moda?.

4º- Se hace un estudio en un barrio sobre el precio del alquiler de 110 viviendas obteniéndose la siguiente tabla:
Precio del alquiler (ptas.) Número de viviendas
(50.000-60.000) ------------------------ 25
(60.000-70.000) ------------------------ 28
(70.000-80.000) ------------------------ 38
(80.000-90.000) ------------------------- 13
(90.000-100.000) ------------------------ 6
¿Cúal es la moda?.

5º- En un test aplicado a 9 niños se obtienen los resultados:
3,4,5,2,0,1,7,9,8. ¿Cúal es la moda?.

6º- Al lanzar un dado 70 veces obtenemos la tabla siguiente:

Resultados	1	2	3	4	5	6
Frecuencias	12	10	19	0	15	14
F.Acumuladas	12	22	41	41	56	70

¿ cúal es la mediana?.

7º- En un observatorio meteorológico de una ciudad tenemos las siguientes temperaturas máximas en el mes de diciembre:
12,3,4,10,11,12,4,5,5,6,8,2,5,6,7,7,8,10,12,13,12,6,9,9,6,7,8,10,10,8,8.
Halla la media, la moda y la mediana.

8º- Tomamos 50 centros de trabajo y vemos los accidentes laborales en un determinado año.

Nº de accidentes		Frecuencia
[0	2.000)	5
[2.000	4.000)	5
[4.000	6.000)	7
[6.000	8.000)	7
[8.000	10.000)	6
[10.000	12.000)	4
[12.000	14.000)	2
[14.000	16.000)	8
[16.000	18.000)	3
[18.000	20.000)	3

Calcula la media, la moda y la mediana.

9º- Pesamos a 30 niños y obtenemos la siguiente tabla:

Peso de los niños	Marca de clase	Frecuencia
[10.4, 13.4)	11.9	7
[13.4, 16.4)	14.9	3
[16.4, 19.4)	17.9	8
[19.4, 22.4)	20.9	10
[22.4, 25.4)	23.9	2

Halla la moda, la media y la mediana.

Ejercicios de Medidas de Dispersión

1º- Si preguntamos a 10 amas de casa cuánto dura una pastilla de jabón de una marca determinada, tenemos las siguientes respuestas en días : 5,6,9,10 6,7,11,8,5,6.
¿Cuál es el recorrido?

2º- Consideramos las medidas de 10 jugadores de baloncesto que son las siguientes:1,68; 1,70; 1,82; 1,63; 1,71; 1,83; 1,72; 1,80; 1,84; 1,67.
¿Cúal es el recorrido?.

3º- Halla la desviación media de las edades de los componentes de un grupo de teatro:
8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22.

4º- Los jornales de 5 obreros son:
5.000, 6.000, 5.100, 5.300, 5.900.
Halla la desviación media.

5º- Lanzado un dado 50 veces se ha obtenido la siguiente distribución:

Xi	1	2	3	4	5	6
Fi	6	11	6	7	9	11

Halla la varianza y la desviación típica.

6º- Halla la media aritmética y la desviación típica de las notas obtenidas en un examen de 150 niños que tuvieron las puntuaciones siguientes:

Puntuación	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº alumno	3	4	8	10	28	42	32	16	4	3

7º- Calcula la desviación típica de las alturas de los chicos de una escuela cuya distribución es la que sigue:

Altura	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169
nºchicos	1	2	9	11	15	18	10	8	5	3

8º- **(Examen)** Un portero ha encajado en los últimos seis partidos el siguiente número de goles: 1, 0, 1, 3, 0, 1.
Averiguar la media y la desviación típica de la muestra.

9º- **(Examen)**. Las ventas de una fábrica de aceite medidas en litros han sido en los últimos 5 años: 250; 350; 375; 400; 425.
Hallar la media y la desviación típica de la muestra.

EJERCICIOS DE ESTADÍSTICA: ACCESO GRADO SUPERIOR

1º) (2009) Tres amigos cronometran el tiempo que tardan de ir a su casa al instituto durante dos semanas, de lunes a viernes. Los resultados son:

Pepe	15	20	18	15	17	18	16	17	18	19
Lluís	25	20	20	20	20	18	20	19	20	20
Laura	5	15	16	15	20	20	19	16	16	18

El tiempo viene en minutos.

Encontrar la medida de centralización más representativa en cada caso y justifica tu respuesta.

2º) (2003) El número de trabajadores de 40 empresas de construcción de una determinada ciudad viene dado por la tabla siguiente:

Trabajadores	[0,10]	[10,20]	[20,30]	[30,40]	[40,50]
Empresas	2	8	10	12	8

a) Dibuja el histograma correspondiente a la tabla.
b) Calcula la media y la desviación típica.

3º) (2002) Las notas de un alumno en los tres primeros exámenes de matemáticas son: 7 , 5 y 7

a) ¿A partir de qué nota en el cuarto examen, el alumno aprueba (obtiene una media en los cuatro de 5).
b) ¿Puede llegar a obtener una media de 8?.

8. Probabilidad

La probabilidad mide la facilidad o dificultad de que aparezca un resultado determinado cuando se realiza un experimento aleatorio, asignando un valor entre 0 y 1. 0 correspondería a un resultado imposible y 1 a un resultado seguro.

Conceptos básicos

Experiencia aleatoria: experimento cuyo resultado depende del azar.

Ejemplos: tiramos un dado al aire y anotamos la puntuación de la cara superior, lanzamos una moneda al aire y anotamos el resultado de la cara superior, tiramos una chincheta y vemos si cae con la punta hacia arriba o hacia abajo.

Suceso elemental: cada uno de los posibles resultados que se pueden presentar.

Ejemplos: al lanzar una moneda al aire, los sucesos elementales son la cara y la cruz. Al lanzar un dado, los sucesos elementales son el 1, el 2, el 3, ..., y el 6. Al lanzar dos monedas al aire los sucesos elementales son CC, CX, XC y XX.

Suceso compuesto: es cualquier subconjunto de sucesos elementales.

Ejemplo: al lanzar un dado el suceso "número par" es un suceso compuesto, integrado por 3 sucesos elementales: el 2, el 4 y el 6.

Espacio muestral: conjunto de todos los sucesos elementales posibles.

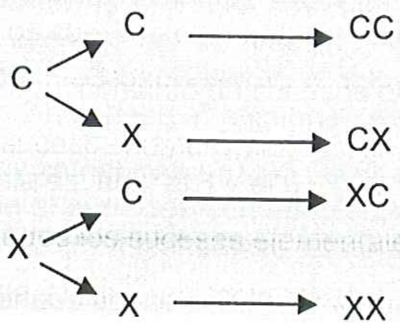
Ejemplo: si tiramos una moneda al aire una sola vez, el espacio muestral será cara o cruz.

Experimento compuesto es aquel que está compuesto de dos o más experimentos simples.

Ejemplo: tirar dos dados

Ejemplo: tirar un dado y una moneda

Ejemplo: si lanzamos dos monedas al aire los sucesos elementales son CC,CX,XC,XX. Es interesante obtenerlos a partir del diagrama de árbol:



El suceso contrario o complementario de un suceso A es aquel que ocurre si no ocurre el suceso. Se indica como $\overline{A}$ o como A'.

Ejemplo: en el experimento consistente en lanzar un dado el complementario de un suceso A = "salir número par" es A' = "salir número impar", integrado por los sucesos elementales: 1, 3 y 5.

Sucesos equiprobables: son los sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir.

Ejemplo: en el experimento consistente en lanzar un dado al aire los sucesos elementales 1, 2, 3, 4, 5 y 6 tienen la misma facilidad de ocurrir, son todos equiprobables. En el experimento consistente en lanzar una chincheta al aire los sucesos elementales caer con la punta hacia arriba y salir con la punta hacia abajo no tienen la misma facilidad de ocurrir, no son todos equiprobables.

Operaciones con sucesos.

Unión de dos o más sucesos: la unión será otro suceso formado por todos los elementos de los sucesos que se unen. Se expresa mediante el símbolo U.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y consideramos los sucesos A = "salir par" y B = "salir mayor que 3". El suceso unión estaría formado por los siguientes resultados: el 2, el 4, el 5 y el 6. Se expresa así: $A \cup B = 2, 4, 5, 6$.

Intersección de dos o más sucesos: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes a los sucesos considerados. Se expresa mediante el símbolo $\cap$.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y consideramos los sucesos A = "salir par" y B = "salir mayor que 3". El suceso intersección estaría formado por los siguientes resultados: el 4 y el 6. Se expresa así: $A \cap B = 4, 6$.

Sucesos incompatibles: son aquellos que no se pueden dar al mismo tiempo ya que no tienen elementos comunes (su intersección es el conjunto vacío).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y consideramos los sucesos A = "salir par" y B = "salir impar". Es evidente que ambos no se pueden dar al mismo tiempo.

Sucesos compatibles: son aquellos que se pueden dar al mismo tiempo ya que tienen elementos comunes (su intersección no es el conjunto vacío).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y consideramos los sucesos A = "salir par" y B = "salir mayor que 3". Es evidente que ambos se pueden dar al mismo tiempo porque tienen en común el 4 y el 6.

Asignación de probabilidades

La probabilidad mide la mayor o menor posibilidad de que se dé un determinado resultado (suceso) cuando se realiza un experimento aleatorio, asignando un valor entre 0 y 1.

La Ley de los grandes números dice que al realizar un experimento muchas veces las frecuencias relativas de cada uno de los sucesos se van acercando a un determinado valor y que será este valor la probabilidad de cada uno de los sucesos. Esta forma de asignar probabilidades se denomina "a posteriori".

Ejemplo: Si analizamos 1.000.000 de accidentes y vemos que en 438.965 los conductores eran mujeres podemos decir que la probabilidad de que en un accidente el conductor sea mujer es 438.965 / 1.000.000 $\approx$ 0'44.

En el caso de experimentos aleatorios en los que los sucesos elementales sean equiprobables se puede asignar probabilidades "a priori", sin tener que realizar el experimento muchas veces. En este caso se aplica la Ley de Laplace. Según esta ley la probabilidad de un suceso A viene dada por el siguiente cociente:

$$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ casos favorables}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ casos posibles}}$$

Ejemplo: la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja española sea un oro se puede calcular aplicando la Ley de Laplace porque todas las cartas tienen la misma probabilidad de salir. Como el nº de casos posibles son las 40 cartas de la baraja y el nº de casos favorables son las 10 cartas de oro, $P(\text{oros}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

Ejemplo: la probabilidad de que al sacar al azar una bola de color rojo de una bolsa que contiene cinco bolas rojas, tres verdes y dos azules, se puede calcular aplicando la Ley de Laplace porque todas las bolas tienen la misma probabilidad de salir. Nº de casos posibles son las 10 bolas que hay en total; nº de casos favorables son las 5 bolas rojas, $P(\text{roja}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Propiedades de la probabilidad

Como ya sabemos, la probabilidad de un suceso cualquiera A es un número entre 0 y 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Nunca será mayor el número de casos favorables que el número de casos posibles. Si obtenemos un resultado diferente sabremos que hemos hecho algo mal.

La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario es 1: $P(A)+P(A')=1$. De esta propiedad se deriva otra muy interesante: $P(A)=1-P(A')$.

Ejemplo: Para calcular la probabilidad de que al tirar un dado el resultado sea diferente de 4 podemos aplicar la Ley de Laplace directamente o esta propiedad:

$$P(\text{diferente de } 4) = 1 - P(4) = 1 - 1/6 = 5/6.$$

Si A y B son dos sucesos compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ejemplo: Para calcular la probabilidad de que al lanzar un dado salga par o mayor que 3 podemos aplicar la Ley de Laplace directamente o esta propiedad:

$$P(\text{par} \cup > 4) = P(\text{par}) + P(> 4) - P(\text{par} \cap > 4) = 3/6 + 2/6 - 1/6 = 4/6 = 2/3.$$

Si A y B son dos sucesos incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ejemplo: Para calcular la probabilidad de que al lanzar un dado salga par o menor que 2 podemos aplicar la Ley de Laplace directamente o esta propiedad:

$$P(\text{par} \cup < 2) = P(\text{par}) + P(< 2) = 3/6 + 1/6 = 4/6 = 2/3.$$

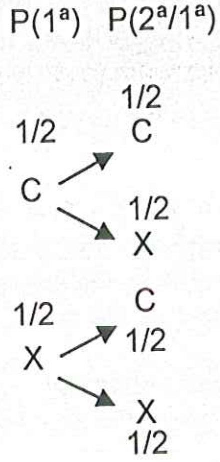
Probabilidad condicionada

Sucesos independientes son aquellos sucesos en los que la realización de uno de ellos no influye en el resultado del otro.

Ejemplos: extraer una carta de una baraja, devolverla al mazo y extraer una segunda baraja. Tirar una moneda dos veces. Tirar un dado y una moneda.

Es interesante desarrollar el diagrama de árbol donde la primera columna son las probabilidades del primer experimento y la segunda columna se corresponden con las del segundo.

Ejemplo: si tiramos dos monedas el resultado que se obtenga en la primera no influye en el resultado de la segunda. Son sucesos independientes.



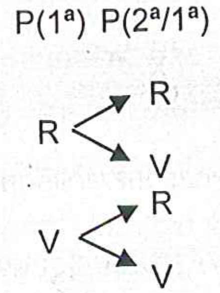
Sucesos dependientes son aquellos sucesos en los que la realización de uno de ellos sí influye en el resultado del otro.

Ejemplos: extraer una carta de una baraja, y sin devolverla extraer una segunda baraja. Sacar dos bolas de una bolsa que contiene 5 bolas de diferente color.

En los sucesos dependientes, la probabilidad de un suceso B influida por la ocurrencia de otro suceso A se llama probabilidad condicionada de B a la ocurrencia de A o P(B/A).

También aquí es interesante desarrollar el diagrama de árbol donde la primera columna son las probabilidades del primer experimento y la segunda columna se corresponden con las del segundo condicionadas a la realización del primero.

Ejemplo: si sacamos dos bolas de una bolsa que contiene tres bolas rojas y dos verdes, el color de la primera bola influirá en las que quedan a la hora de extraer la segunda bola. Son sucesos dependientes.



Para calcular probabilidades condicionadas se aplica la siguiente fórmula:

$P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, en la que P(B/A) es la probabilidad de que se de el suceso B condicionada a que se haya dado el suceso A; P(B∩A) es la probabilidad del suceso simultáneo de A y de B y P(A) es la probabilidad a priori del suceso A

Ejemplo: la probabilidad de que habiendo salido un número par en un dado, éste sea un dos será:

$$P(2/par) = \frac{P(2 \cap par)}{P(par)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Ejemplo: la probabilidad de que una persona sufra problemas respiratorios es el 0,2, la probabilidad de que una persona sufra problemas cardiacos es 0,3 y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas respiratorios y cardiacos es 0'07.La probabilidad de que una persona sufra problemas respiratorios si tiene problemas cardiacos será:

$$P(resp/card) = \frac{P(resp \cap card)}{P(card)} = \frac{0'07}{0'3} = 0'23$$

El diagrama de árbol ayuda al cálculo de estas probabilidades.

Ejemplo: en el ejemplo de la bolsa que contiene tres bolas rojas y dos verdes los valores de las probabilidades serán estos

P(1ª) P(2ª/1ª)

2/4 (si la 1ª es roja sólo quedan 2 rojas de 4 bolas restantes)
3/5 R → R
R → V 2/4 (si la 1ª es roja aún quedan 2 verdes de 4 bolas restantes)
V → R 3/4 (si la 1ª es verde aún quedan 3 rojas de 4 bolas restantes)
2/5 V → V 1/4 (si la 1ª es verde sólo queda 1 verde de 4 bolas restantes)

Probabilidad compuesta

En los sucesos independientes la probabilidad de que se den simultáneamente dos sucesos (suceso intersección de A y B) es igual a la probabilidad del suceso A multiplicada por la probabilidad del suceso B.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo: la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga en los dos un seis, al tratarse de sucesos independientes, es $P(6 \cap 6) = P(6) \cdot P(6) = 1/6 \cdot 1/6 = 1/36$. También se puede calcular aplicando la Ley de Laplace: $P(6,6) = 1/VR_{6,2} = 1/36$.

En los sucesos dependientes la probabilidad de que se den simultáneamente dos sucesos (suceso intersección de A y B) es igual a la probabilidad a priori del suceso A multiplicada por la probabilidad del suceso B condicionada al cumplimiento del suceso A.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Ejemplo: la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja española sean dos reyes, al tratarse de sucesos dependientes, es $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2/R_1) = 4/40 \cdot 3/39 = 1/130$. También se puede calcular aplicando la Ley de Laplace: $P(R_1,R_2) = C_{4,2}/C_{40,2} = 6/780 = 1/130$.

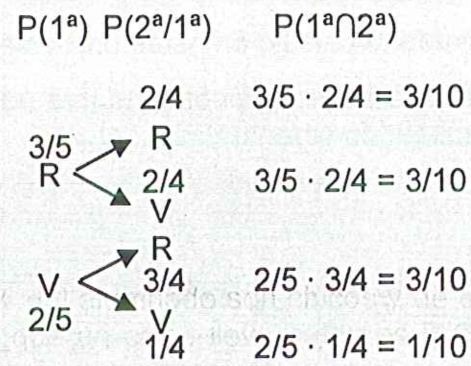
$$C_{4,2} = \frac{4!}{4-2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 1} = 12 \qquad P(R_1, R_2) = \frac{12}{1560} = \frac{6}{78}$$

$$C_{40,2} = \frac{40!}{38!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot \cancel{38}}{\cancel{38} \cdot 37} = 1560$$

Ejemplo: En una clase el 35% del alumnado son chicos y de ellos un 30% utilizan gafas. La probabilidad de que un chico lleve gafas es P(Chico ∩ gafas) = P(chico) · P(gafas / chico) = 0'35 · 0'3 = 0'105.

También aquí es interesante desarrollar el diagrama de árbol donde la primera columna son las probabilidades del primer experimento, la segunda columna se corresponden con las del segundo condicionadas a la realización del primero y la tercera al suceso intersección cuya probabilidad se calcula multiplicando las probabilidades anteriores correspondientes.

Ejemplo: en el ejemplo de la bolsa que contiene tres bolas rojas y dos verdes los valores de las probabilidades serán estos

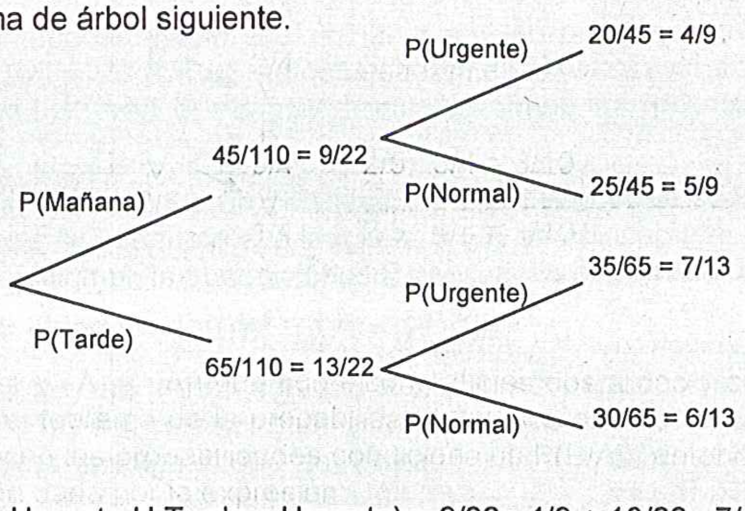


Teorema de la probabilidad total

Si tenemos n sucesos A_1, A_2, ...,An que son incompatibles dos a dos y cuya unión ellos es el suceso seguro, el teorema de la probabilidad total dice que sea B un suceso cualquier del que se conocen las probabilidades condicionales P(B/Ai), entonces la probabilidad del suceso B viene dada por la expresión:

P(B)=P(A1)·P(B/A1)+ P(A2)·P(B/A2)+.....+ P(An)·P(B/An)

Ejemplo: Una empresa envía de media por la mañana 20 entregas urgentes y 25 normales, y por la tarde 35 urgentes y 30 normales. Para calcular la probabilidad de que una entrega de las enviadas a lo largo del día sea urgente nos ayudamos del diagrama de árbol siguiente.



P(Mañana∩Urgente U Tarde ∩Urgente) = 9/22 · 4/9 + 13/22 · 7/13 = 4/22 + 7/22 = 11/22 = 1/2

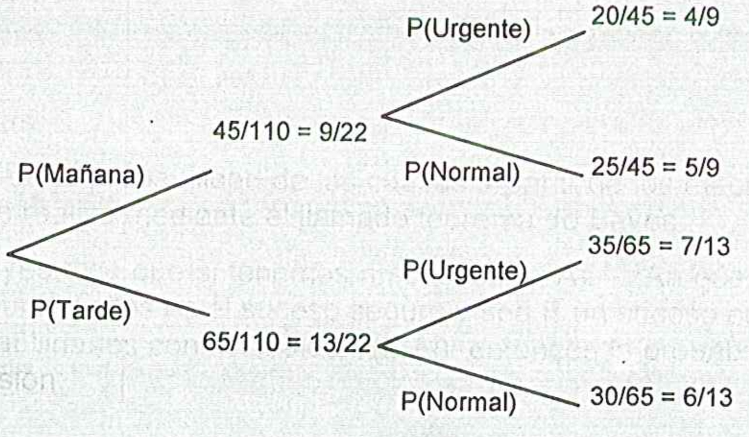
Teorema de Bayes

La determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados se realiza mediante el llamado teorema de Bayes.

El teorema de Bayes dice que si tenemos n sucesosA_1, A_2, ...,An que son incompatibles dos a dos y cuya unión ellos es el suceso seguro y sea B un suceso cualquier del que se conocen las probabilidades condicionales P(B/Ai). entonces la probabilidad P(Ai/B) viene dada por la expresión:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+...+P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

Ejemplo: En el mismo caso anterior, para calcula la probabilidad de que una entrega urgente se haya realizado por la tarde procederemos así:



P(Tarde/Urgente) = P(Tarde ∩ Urgente) / P(Mañana∩Urgente U Tarde ∩Urgente) = (13/22 · 7/13)/(1/2) = 14/22 = 7/11

Actividades resueltas

1. Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un múltiplo de 3.

   Sea A = "múltiplo de 3" ; aplicando la Ley de Laplace P(A) = 2/6 = 1/3.

2. Una urna contiene 20 bolas rojas, 15 azules y 7 verdes. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola sea roja o verde.

   Aplicando la Ley de Laplace P(roja o verde) = 27/ 42 = 9/14.

   Aplicando la probabilidad de la unión para sucesos incompatibles: P(roja U verde) = P(roja) + P(verde) = 20/42 + 7/42 = 27/ 42 = 9/14.

3. Calcula la probabilidad de que al extraer una carta de una baraja española sea rey o copas.

   Aplicando la Ley de Laplace P(rey o copas) = 13/ 40.

   Aplicando la probabilidad de la unión para sucesos compatibles: P(rey U copas) = P(rey) + P(copas) - P(rey ∩ copas) = 4/40 + 10/40 – 1/40 = 13/ 40.

4. Determina la probabilidad de que al lanzar dos dados sumen 9.

PROBABILIDAD

Sucesos Aleatorios: son aquellos en los que no se puede predecir sus resultados.
Sucesos Determinantes: son aquellos en los que sí se puede predecir sus resultados.
Espacio muestral: es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
Suceso elemental: cuando está formado por un solo resultado.
Suceso compuesto: está formado por varios sucesos elementales, es decir, existen varios resultados.
Sucesos imposibles: no se pueden verificar nunca.
Sucesos seguros: se verifican siempre.
Sucesos incompatibles: no pueden realizarse a la vez.
Sucesos compatibles: se pueden realizar a la vez.
Frecuencia absoluta: es el número de veces que aparece un determinado valor.
Frecuencia relativa: es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de experimentos. Su valor estará entre 0 (sucesos imposibles) y 1 (sucesos seguros).
Probabilidad: es la medida de la facilidad o dificultad de que se produzca un suceso. La probabilidad del suceso seguro será 1 y la probabilidad del suceso imposible será 0.
Sucesos equiprobables: son aquellos que tienen la misma probabilidad. Para ellos se aplica la **REGLA DE LAPLACE:**

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Posibles}}$$

Probabilidad Compuesta: la probabilidad de un suceso compuesto se puede calcular sumando la probabilidad de los sucesos incompatibles en que se puede descomponer.
Dados dos sucesos A y B tenemos que:
P(A o B) = P(A) + P(B); si son incompatibles. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
P(A o B) = P(A) + P(B) – P(A y B); si son compatibles. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Suceso contrario (A') a un experimento aleatorio A, es aquel que se verifica cuando no se verifica A.
P(A') = 1 – P(A)
Sucesos Independientes: cuando el resultado de un no influye en el del otro.
Sucesos Dependientes: cuando el resultado de uno influye en el del otro.
Diagrama del árbol: se utiliza para poner el espacio muestral del experimento compuesto.

Probabilidad Compuesta P(A y B)
Independientes → $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Dependientes → $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$

EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

1º- De estos fenómenos, ¿Cuáles son deterministas y cuáles son aleatorios?.
a) El tiempo que hará el próximo domingo.
b) El resultado de tirar un dado.
c) La hora a la que se pondrá el sol el lunes.

2º- Tenemos una urna con bolas amarillas, rojas, verdes y azules. Estudia el espacio muestral del experimento aleatorio "extraer una bola" y enumera tres sucesos elementales.

3º- Tenemos una urna con bolas numeradas del 1 al 8 y extraemos una bola. Estudia los siguientes sucesos compuestos:
a) Obtener un número impar.
b) Obtener un número primo.
c) Obtener un número menor que 3.

4º- Tenemos una baraja española. Estudia si son compatibles o no los siguientes sucesos:
a) A = {Salir un rey}.
B = { Salir una figura}.
b) A = {Salir una sota . }
B = {No salir figura}.
c) A = {Salir el rey de oros}.
B = { Salir una carta de copas}.

5º- Tenemos una urna con cuatro bolas: blanca, negra, azul y roja . Y sacamos una de ellas. Di cuál será el suceso seguro y cuál el imposible.

6º- Tenemos dos dados que lanzamos a la vez y anotamos la suma de los resultados, consideremos los sucesos:
A ={La suma anterior es un número primo}.
B ={La suma es múltiplo de tres}.
¿Son incompatibles ambos sucesos?.

7º- Tenemos la baraja española. Extraemos de ella una carta. Utilizando la regla de Laplace, calcula las siguientes probabilidades:
a) Que salga un as.
b) Que salga el as de oros.
c) Que salga una copa.

8º- Una ruleta está compuesta por los números 0,1,2,......36 , por lo tanto, son 37 números, de los cuales la mitad son rojos y la otra mitad son negros, alternativamente. A la hora de jugar, calcula las siguientes probabilidades:
a) Que salga rojo.
b) Que salga el 10.
c) Que salga un número par.

9º- Tenemos una urna con ocho bolas numeradas del 1 al 8. Al sacar una bola, halla la probabilidad de obtener:
a) Un número menor de 4.
b) Un número par.

10º- Si de la baraja española extraemos una carta, halla la probabilidad de obtener alguno de estos sucesos a la vez:
a) A = {Sacar un caballo}.
b) B = {Sacar un basto}.
c) Sacar el caballo de bastos.
d) Sacar un caballo o un basto.

11º- Tenemos el experimento aleatorio consistente en lanzar consecutivamente tres monedas.
a) Explica si son dependientes o independientes las diferentes tiradas de las monedas.
b) Escribe el espacio muestral.
c) Dibuja el diagrama de árbol.
d) Cuál es la probabilidad de obtener (xxc).Es decir, cruz, cruz, cara.

12º- Lanzamos dos dados, uno rojo y otro verde. Hallar la probabilidad de que salga un 3 en los dos dados.

13º- Se lanza una moneda dos veces.¿Cuál es la probabilidad de obtener solamente una cara en ambos lanzamientos?.

14º- En una urna hay 19 bolas de colores: 10 rojas,6 blancas y 3 negras. Se extraen dos bolas.¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas?.
a) Con devolución, es decir, se devuelve la bola extraída a la urna.
b) Sin devolución de la primera bola extraída.

15º- Dada una urna con 50 papeletas numeradas desde el 1 al 50, extraemos una de ellas. Halla:
a) Probabilidad de que salga el 40.
b) Probabilidad de que acabe en 0.
c) Probabilidad de que no salga el 25.

16º- Se extrae una carta de la baraja. Halla la probabilidad de las sucesos siguientes:
a) Que salga el rey de copas.
b) Que salga un oro.
c) Que no sea un basto.
d) Que no sea figura.

17º- Vamos a estudiar unos apuntes y sabemos que de cada 100 folios salen 2 defectuosos. Halla las siguientes probabilidades:
a) Coger folio defectuoso.
b) Coger folio no defectuoso.

18º- Se lanzan dos dados. Halla la probabilidad de:
a) Los resultados de cada dado sean iguales.
b) Los resultados de cada dado sean distintos.

19º- (EXAMEN-Acceso). En una baraja española de cuarenta cartas y cuatro palos (oros, copas, espadas y bastos), calcular la probabilidad de:

a) al sacar una carta que sea una de oros.

b) al sacar dos cartas que ambas sean caballos.

20º- (EXAMEN-Grado Superior). Realizamos el experimento consistente en lanzar dos dados y anotar la suma de los puntos obtenidos.

a) Di cuáles de los siguientes sucesos son equiprobables:
A = obtener 2 puntos.
B = obtener 5 puntos.
C = obtener 10 puntos.
D = obtener 12 puntos.
F = obtener puntuación menor que 4.

b) Describe el suceso contrario al suceso F. Calcula su probabilidad.

EJERCICIOS DE PROBABILIDAD

1º) Se extrae al azar una carta de una baraja española. Halla las siguientes probabilidades:

a) Que sea un rey o un as.
b) Que sea una copa o una figura.
c) Que sea un oro o una espada.
d) Que no sea figura.

2º) Extraemos de una baraja tres cartas. Halla la probabilidad de que sean 3 ases.

a) Con devolución.
b) Sin devolución.

3º) En una clase hay 17 chicos y 18 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase. Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos sean chicos.
b) Sean dos chicas.
c) Sea un chico y una chica.

4ª) En una empresa hay 200 empleados, 100 hombres y 100 mujeres. Los fumadores son 40 hombres y 35 mujeres.

a) Si elegimos un empleado al azar, calcula la probabilidad de que sea hombre y no fume: P (H y no F).
b) Calcula también: P (M y F), P (F/M)

5ª) Un jugador de baloncesto suele acertar el 75% de sus tiros desde el punto de lanzamiento de personales. Si acierta el primer tiro, puede tirar de nuevo.

Calcula la probabilidad de que:

a) Haga dos puntos.
b) Haga un punto.
c) No haga ningún punto.

EJERCICIOS DE EXAMENES (GRADO SUPERIOR)

1ª) (Examen 2007). Si lanzamos un dado al aire, y una moneda, cuál es la probabilidad de obtener:

a) Un seis y cara.
b) Un cuatro y cruz.

2ª) (2006). Si lanzamos dos monedas al aire, cuál es la probabilidad de obtener:

a) Dos caras
b) Cara y cruz
c) Dos cruces

3ª) (2008). En una clase hay 7 chicos y 8 chicas. Elegimos al azar dos alumnos de esa clase. Calcula la probabilidad que:

a) Sean dos chicas.
b) Sean dos chicos.
c) Sean un chico y una chica.

4ª) (2009). En mi clase somos 20 estudiantes, y solamente 4 llevan gafas. Si se eligen dos alumnos de la clase al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Los dos lleven gafas.
b) Ninguno lleve gafas.
c) Uno lleve gafas y el otro no.