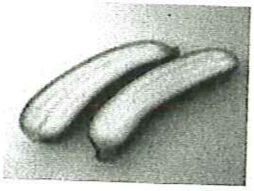
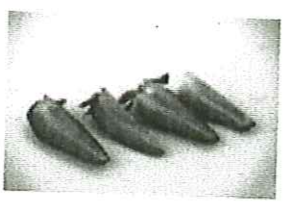
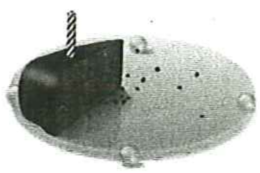
FRACCIONES

1. ¿Qué son las fracciones?
2. Cálculos aplicados:

   Regla de tres y porcentajes
3. ¿Cómo calcular una fracción equivalente? ¿Cómo simplificar?
4. ¿Cómo se operan las fracciones?

   Suma.
   Resta.
   Multiplicación.
   División.
   Potencia.
   Comparación de fracciones
5. ¿Cómo resolver problemas?



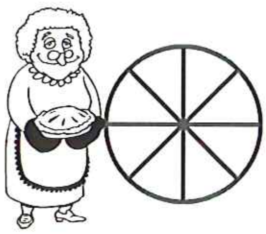
1. ¿Qué son las fracciones?

Una fracción es la representación de un reparto y la utilizamos comúnmente más de lo que parece, por ejemplo: en el supermercado, cuando compramos medio kilo de carne; cuando pedimos un tercio de cerveza o cuando compramos un décimo de lotería en Navidad..., en todos estos casos, utilizamos fracciones.
Los términos de la fracción se llaman:

1 → NUMERADOR
2 → DENOMINADOR

Las fracciones pueden tener diferentes significados y tener varias aplicaciones, se pueden utilizar para:

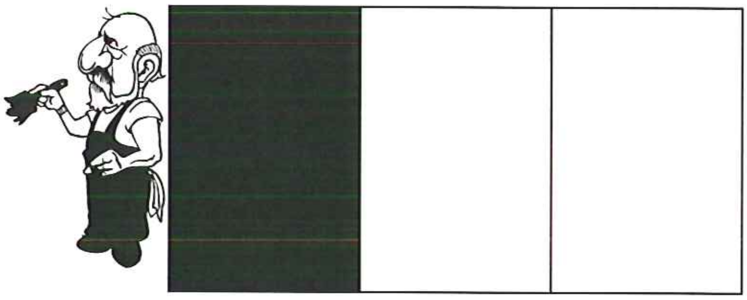
REPARTIR



Si queremos repartir una tarta con 8 trozos entre 2 personas lo expresaríamos de la siguiente manera 8/2. Si realizamos la división nos daría que a cada persona le corresponden 4 trozos.

FRACCIONAR O DIVIDIR

Imaginad que un pintor coge una pared y pinta una tercera parte (1/3), esto quiere decir que ha tomado la pared (que es la unidad (1)) y la ha dividido en tres partes, de las que ha pintado una. Ha pintado un tercio de pared.



REPRESENTAR UNA RELACIÓN O RAZÓN

Se puede representar la relación o "razón" que existe entre dos cantidades. Así, por ejemplo, si para hacer un determinado pastel necesitamos 6 huevos por cada kg de harina, la relación existente entre la harina y los huevos se expresaría de la siguiente forma: 1/6.

2. Cálculos aplicados: Regla de tres y porcentajes

1. Hallar las partes de un número

En ocasiones nos podrán preguntar como hallar una fracción de un número. Veamos un ejemplo:

¿Cuánto son las 2/3 partes de 600 euros?

$$\frac{2}{3} \text{ de } 600 \longrightarrow \frac{2}{3} \times 600 = \frac{2 \cdot 600}{3} = \frac{1200}{3} = 400 \text{ euros}$$

Multiplicamos el 2 por la cantidad (600) y el resultado se divide entre 3. El resultado es 400 euros.

2. Hallar el tanto por cien de un número (porcentajes)

A veces, en algunos problemas nos pueden preguntar cómo hallar el tanto por cien de un número. Saber calcularlo puede sernos muy útil sobre todo de cara a ir de compras. Veamos un ejemplo:

Nos hacen un descuento del 35% en un pantalón de 20 euros, si queremos saber cuánto nos descuentan debemos de calcular el 35% de 20.

Calcular el 35% de 20 e

-El 35% es lo mismo que poner como proporción 35/100

$$35\% = \frac{35}{100}$$

-Ahora multiplicamos esta fracción por el número en este caso 20

$$\frac{35}{100} \times 20 = \frac{35 \cdot 20}{100} = \frac{700}{100} = \mathbf{7}$$

Así mismo podemos decir que el 35% de 20 euros son 7 euros. Luego sabemos que nos descuentan 7 euros.
Si queremos saber cuánto nos cuesta el pantalón rebajado debemos de restar a lo que valía el pantalón (20 euros) lo que le descuentan (7 euros).

$20 - 7 = 23$ *El pantalón cuesta 23 euros*

3. Regla de tres

La regla de tres la utilizaremos sobre todo para resolver problemas. Principalmente aquellos en los que los datos mantienen una relación proporcional directa.
Se le llama regla de tres porque conocemos tres de las valores del problema y tenemos que hallar otro más.
Para ver cómo se resuelven los problemas de regla de tres debemos ver un ejemplo:

Si un verdulero vende 12kg de tomate a 36 euros, ¿a qué precio venderá 5 Kg de tomate?

Lo primero que hacemos es plantear el problema, teniendo en cuenta el colocar los datos agrupados: en la derecha colocamos kg con kg y en la izquierda colocamos euros con euros.

Si 12 Kg ________________ son 36 euros
5 Kg ________________ serán x euros

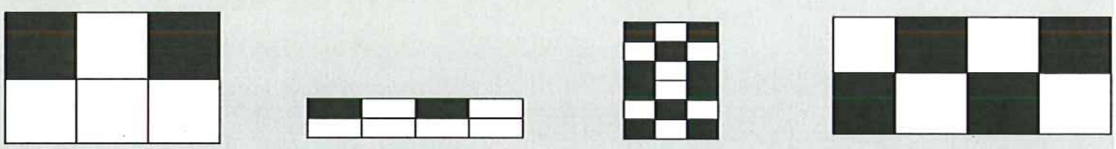
Luego tenemos que saber que la incógnita siempre es igual a la multiplicación de los dos datos que quedan cruzados, divididos por el otro dato que queda:

12 Kg ________________ 36 euros
5 Kg ________________ x euros (pongo x porqué no conozco el número)

$$x = \frac{5 \cdot 36}{12} = \frac{180}{12} = 15$$

Finalmente, realizamos las operaciones y el número que nos da es la incógnita que buscábamos: 15 euros.

1.- Expresa con una fracción la parte sombreada de cada figura:



2.- Calcula:

Los 2/3 de 24→ 25% de 45 →

Los 5/6 de 82→ 15% de 244→

Los 4/7 de 124→ 30% de 6450→

3.- Cada uno de los 200 socios de un gimnasio paga 37 euros de abono trimestral. El próximo trimestre el número de socios se espera que aumente un 4 % y el abono se incrementará un 5 % ¿Cuántos socios habrá? ¿Cuánto se recaudará con los abonos?

4.-Un fontanero ha realizado un trabajo. Por pagar al contado ha efectuado un descuento de 5%, lo que supone una rebaja de 16 euros. ¿Cuál era el importe total del trabajo? ¿Qué cantidad supone el IVA del 16% sobre el importe total del trabajo?

5.-Un coche realiza un viaje y consume la sexta parte de la gasolina que lleva y al final del trayecto todavía le quedan 25 litros en el depósito ¿Cuántos litros llevaba al iniciar el recorrido?

3. ¿Cómo calcular una fracción equivalente? ¿Cómo simplificar?

Dos fracciones son equivalentes cuando indican la misma proporción, o representan lo mismo.

Hacer fracciones equivalentes

Para **obtener fracciones equivalentes** debemos multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción por el mismo número, el que queramos (2, 3, 4, 15,...). Así de fácil. Siempre que multipliquemos por el mismo número tanto el numerador cómo el denominador obtendremos fracciones equivalentes. Por ejemplo:

x 2 x 3

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$$

Comprobar si dos fracciones son equivalentes

Para **comprobar si dos fracciones son equivalentes** debemos hacer una multiplicación cruzada:
1. Multiplicar el numerador de la 1ª por el denominador de la 2ª.
2. Multiplicar el denominador de la 1ª por el numerador de la 2ª.
3. Si los resultados del numerador y denominador son iguales, son fracciones equivalentes.

Ejemplo:

Comprueba si se cumple la igualdad y por lo tanto si son equivalentes:

$$\frac{1}{4} \quad \frac{2}{8} \quad \frac{8}{8}$$

Hemos multiplicado 1 x 8 y 4 x 2 **(multiplicación cruzada)** y nos ha dado el mismo resultado, por lo tanto; ambas fracciones son equivalentes.

Simplificar fracciones

A veces resolver una operación en la que el resultado es una fracción podremos simplificar dicha fracción. Esto quiere decir, que podremos obtener fracciones más sencillas.

Para hacerlo tan solo debemos dividir el numerador y el denominador por el mismo número, (que será el máximo común divisor (M.C.D.) de los dos, recordar el tema 1). *Veamos un ejemplo:*

Para simplificar $\frac{6}{8}$ hay que buscar un número que pueda dividir al 6 y al 8. Si no sabemos buscarlo podemos hallar el M.C.D. de 6 y 8:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \end{array} \Longrightarrow \quad M.C.D.\ (6\ y\ 8) = 2$$

Ya sabemos que tanto 6 como 8 pueden ser divididos por 2. Así que dividimos los dos números y así conseguimos la fracción equivalente.

$$\frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

6.- Calcula tres fracciones equivalentes a:

a) 4/6 = b) 1/5 = c) 1/10=

7.- Simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{40}{105}$ b) $\frac{145}{35}$ c) $\frac{440}{605}$

4. ¿Cómo se operan las fracciones?

SUMA Y RESTA.

- **CUANDO TIENEN EL MISMO DENOMINADOR**: dejamos el mismo denominador y <u>sumamos los numeradores</u>.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$$

- **CUANDO TIENEN DISTINTO DENOMINADOR:**

1. Hallar el m.c.m. de los denominadores.
2. Ponemos el m.c.m como nuevo denominador.
3. Calculamos el nuevo numerador.

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9}$$

1ER PASO: Hallar el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$3 = 3 \times \boxed{1}$ $\qquad$ $9 = \boxed{3^2}$

m.c.m. = $3^2 \times 1 =$ **9**
El Nuevo Denominador

2DO PASO: Ponemos el m.c.m (9) como denominador:

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} = \frac{?}{9} + \frac{?}{9}$$

3ER PASO: Calculamos el nuevo Numerador:

Para ello haremos la operación siguiente:

$$Numerador\ Nuevo = \frac{Denominador\ Nuevo}{Denominador Viejo} \times Numerador\ Viejo$$

$$\frac{2}{3} + \frac{6}{9} = \frac{?}{9} + \frac{?}{9} \longrightarrow \frac{2}{3} + \frac{6}{9} = \frac{6}{9} + \frac{6}{9} = \boxed{\frac{12}{9}}$$

8.- Calcula las fracciones equivalentes de estas, y que a la vez sea el mismo denominador de todas:

a) 1/3, 2/5, 4/7

b) 3/8, 2/5, 1/4

b) 1/2, 3/4, 100/7

d) 1/2, 2/3, 5/6

9.- Efectúa en cada caso las operaciones indicadas:

a) 1/5 + 3/5 =

b) 2/3 - 1/4 + 3/16 =

c) 4/7 + 1/7 - 3/7 =

d) 1/2 - 7/15 – 3/16=

e) 2/3 + 3/5 + 1/7 =

f) 2/3 - 1/6=

10.- Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de ellas:

2/3			
4/5			

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para **multiplicar** fracciones solo tenemos que multiplicar el numerador por el numerador y el denominador por el denominador. Multiplicamos en línea. *Ejemplo:*

$$\frac{2}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{4 \times 3} = \frac{10}{12}$$

Y para **dividir** es también muy sencillo. Debemos multiplicar los productos cruzados de las fracciones. Multiplicamos en cruz. *Ejemplo:*

$$\frac{2}{4} : \frac{5}{3} = \frac{2 \times 3}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$$

Además también pueden aparecer fracciones en las que el numerador como el denominador aparezcan fracciones. Entonces deberemos solucionar primero la fracción del numerador y después la fracción del denominador, de manera que poco a poco quedará una fracción simple. Vamos a ver un ejemplo:

$$\frac{(1 - 2/3) : 3/5}{(2/3+4/5) \cdot 1/2} = \frac{(3/3 - 2/3) : 3/5}{(10/15+12/15) \cdot 1/2} = \frac{1/3 : 3/5}{22/15 \cdot 1/2} = \frac{(1\times5)/(3\times3)}{(22 \cdot 1)/(15 \cdot 2)} = \frac{5/9}{22/30} =$$

$$= \frac{5 \cdot 30}{9 \cdot 22} = \frac{150}{198} = \frac{25}{33}$$

RECUERDA QUE ...

En las operaciones se realiza siempre primero lo de dentro del paréntesis

⇨ Es sencillo. Solucionamos por un lado el numerador y por otro el denominador, y vamos operando y simplificándolo hasta que sólo nos queda una sola fracción.

11.- Efectúa las operaciones combinadas:

a) $1/4 : (3/5 : 2/3) =$

b) $(1/2 : 3/4) : (1/4 : 2/3) =$

c) $2/3 : (4/5 : 7/3) =$

d) $2/4 + 3/2 - (2/5 + 1/4) =$

e) $(2/3 +5/6-7/12) : (3/4+2/3) =$

f) $1/3 \cdot 3/5 \cdot 2/3 =$

12.- Soluciona las siguientes fracciones y simplifica los resultados:

a) $\dfrac{\left(3+\frac{1}{3}\right)}{\left(8-\frac{1}{2}\right)} =$

b) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} =$

POTENCIAS

Cuando una fracción está elevada a una potencia, el resultado se opera como lo hemos hecho hasta ahora. Recordad que, en este caso, se eleva tanto el numerador como el denominador al exponente.

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}$$

Las potencias también pueden estar elevados a números enteros (es decir, a números positivos y/o negativos). Vemos un ejemplo:

7^2 ⇨ Esta expresión sale de $\Longrightarrow \frac{7^5}{7^3} = 7^5 : 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

7^{-2} ⇨ Esta expresión sale de $\Longrightarrow \frac{7^3}{7^5} = 7^3 : 7^5 = 7^{3-5} = 7^{-2}$

Si desarrollamos la expresión $\frac{7^3}{7^5}$ $\Longrightarrow$ $\frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2} = 7^{-2}$

13.- Escribe de distintas formas las siguientes expresiones:

a) 2^{-1}

b) 100^{-2}

c) $0{,}01^{-3}$

d) $(1/4)^{-1}$

f) $((0{,}01)^2)^{-5}$

g) $((1/3)^{-2})^2$

14.- Calcula las siguientes potencias:

a) $(3/7)^6 : (3/7)^3 =$

b) $(1/3)^2 \cdot (1/3)^3 : (1/3)^4 =$

c) $(-2/3)^{-1} : (-2/3)^3 =$

d) $(-3)^{-1} : (-1/3)^3 =$

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Diremos que una fracción es mayor (>) que otra cuando su diferencia o resta sea positiva. Por lo tanto, cuando la diferencia nos dé un número negativo diremos que la fracción es menor (<).

Ejemplo:

2/3 > 1/4⇨ 2/3 es mayor que 1/4 porque si las restamos 2/3 – 1/4 = 8/12 - 3/12 = 5/12, y el resultado es un **número positivo.**

1/7 < 2/5⇨ 1/7 es menor que 2/5 porque al restarlas 1/7 – 2/5 = 5/35 – 14/35 = - 9/35 y el resultado es un **número negativo.**

15.- Compara los siguientes pares de fracciones e indica cuál es la mayor:

a) 1/6 y 5/8

b) 3/4 y 7/2

c) 2/3 y 1/5

d) 1/6 y 6/3

16.- Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: 6/4, 2/5, 5/6, -1/5

NÚMEROS DECIMALES

Al realizar una fracción (es decir, al hacer una división) podemos obtener un número entero (ej. 4/2=2) o también un número decimal (ej. 4/3=1.33). Cuando el resultado sea un número decimal podemos encontrar:

<u>Decimal exacto</u> → *Es un número decimal finito (que tiene fin).*
Ejemplo: 2/5= 0.4

<u>Decimal periódico</u> → *Es un número decimal infinito (que no tiene fin) y en el que, en algunas ocasiones, se repiten las cifras. Ejemplo: 35/11= 3,181818...*

RECUERDA QUE...

Fíjate en el gorrito:

$1,\widehat{5}$ = 1,555555... $248,\widehat{38}$ = 248,38383838...

A este gorrito se le llama "**periodo**" e indica que ese número se repetirá hasta el infinito.

5. ¿Cómo resolver problemas?

La primera vez que leemos el enunciado de un problema nos puede parecer una mezcla engorrosa de números, relaciones, preguntas, unidades... Si leemos despacio y entendemos el problema nos resultará mucho más fácil encontrar la solución.

El primer paso para solucionar un problema es comprenderlo, y para eso hay que **leer despacio el problema** y si es necesario **leerlo 2 y 3 veces**. Después, debemos **<u>subrayar lo más importante</u>** y entender lo que nos dice. Esto nos ayudará a establecer qué es lo que nos piden y cómo organizar los datos que tenemos, algo también muy importante.

Es fundamental saber bien que es lo que nos piden, y apuntarlo en un **apartado de datos** de manera adecuada. Un problema bien organizado es casi un problema resuelto.
Una vez obtenido el resultado es fundamental **comprobar** que **la solución** es correcta.

Los **pasos** a seguir en la resolución de problemas son:

1. **Leer el enunciado al menos dos veces**

   Después de leer el enunciado, es importante que seas capaz de contestar todas estas preguntas:

   - ¿De qué trata el problema?
   - ¿Cuál es la incógnita del problema? ¿Qué es lo que te piden averiguar?
   - ¿Cuáles son los datos del problema?
   - ¿Has realizado algún problema igual o parecido? Si es así recuerda como lo resolviste.

2. **Subrayar los datos y lo que nos piden**

3. **Apuntar los datos y lo que nos piden en un apartado**

4. **Crear un plan y ejecutarlo**

   - Si puedes realiza una estimación mental del resultado.
   - Si es posible, realiza un dibujo o esquema que te ayude a visualizar el proceso de resolución.
   - Efectúa las operaciones que requieras para hallar la solución. Los cálculos se deben realizar en el orden correcto.
   - Escribe la solución de una manera clara y ordenada. Siempre que la solución sea una cantidad numérica, debe ir acompañada de las unidades de medida correspondientes.

5. **Comprobar los datos**

   - Verifica que el resultado cumple con lo que te piden en el enunciado.
   - Contrasta el resultado obtenido con la estimación mental que has realizado anteriormente.
   - Reflexiona si la solución es lógica según el enunciado del problema.
   - Repasa el método que has empleado para hallar la solución.

17.- Si una barra de un metro de longitud pesa 2/5 Kg ¿cuánto pesará una barra de 3/4 m?

18.- Se reparte un terreno de 350 Hectáreas entre tres personas. A la primera le corresponde 2/7 del total, a la segunda la cuarta parte de lo que queda y a la tercera el resto ¿qué cantidad de terreno recibe cada uno?

19.- En unas compras nos hacen el 20% de descuento y nos cargan un 6% de IVA. Comprueba que es indiferente aplicar primero el descuento y a continuación el IVA, que aplicar primero el impuesto y luego el descuento.

20.- Al pagar una factura nos han hecho un descuento del 15% de su importe total y la misma ha quedado reducida a 127,5 euros ¿Cuál era el importe inicial de la factura?

21.- Un trayecto de 215 Km lo recorre un coche en 2 horas y otro en 3/2 de hora. En una hora, ¿qué ventaja saca el segundo coche al primero?

22.- Un grifo llena un estanque en 20 horas y otro en 12 horas. Se abre el primer grifo y se echa agua durante una hora. A continuación se abren los dos a la vez durante tres horas y se cierran ¿Qué fracción del estanque queda por llenar?

Números racionales. Ejercicios y problemas

1 Pasar a fracción:

$0{,}0051$, $\quad 0{,}\widehat{0051}$, $\quad 0{,}005\hat{1}$,

2 Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

k) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} =$

l) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} =$

m) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

3 Opera:

$$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}\right] : \left[\left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(2\cdot\frac{1}{2}\right)\right] = \boxed{-4}$$

4 Efectúa

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}} =$$

5 Calcula qué fracción de la unidad representa:

1 La mitad de la mitad.

2 La mitad de la tercera parte.

3 La tercera parte de la mitad.

4 La mitad de la cuarta parte.

6 Elena va de compras con 180 €. Se gasta 3/5 de esa cantidad.¿Cuánto le queda?

7 Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil A lleva recorridos los 5/11 del trayecto cuando el B ha recorrido los 8/13 del mismo. ¿Cuál de los dos va primero? ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?

8 Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los 2/3 de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?