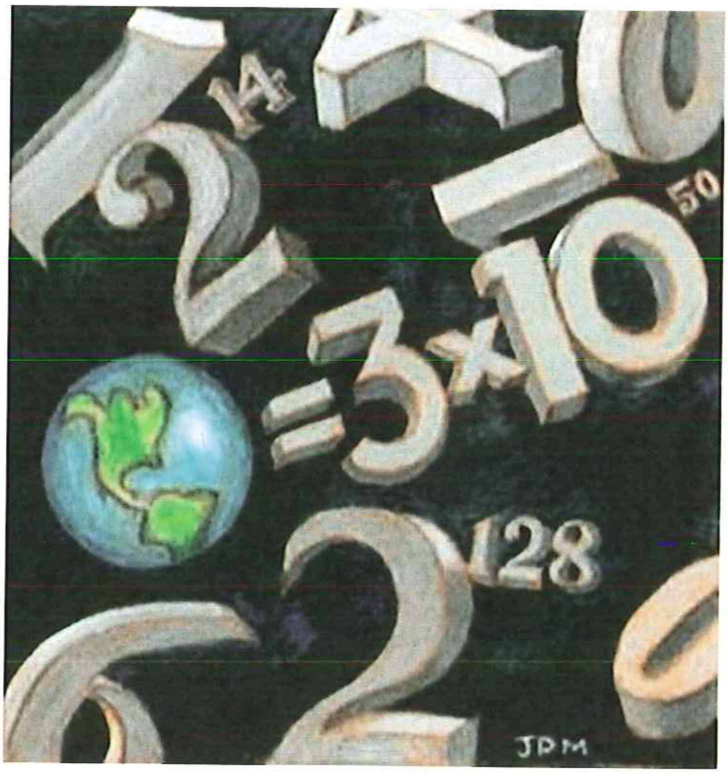
GENERALITAT VALENCIANA
CONSELLERIA D'EDUCACIÓ

CFPA

MATEMÀTIQUES

4t ESO: 2n nivell de 2n cicle



ALUMNE/A: ______________________

CFPA La Pobla Llarga

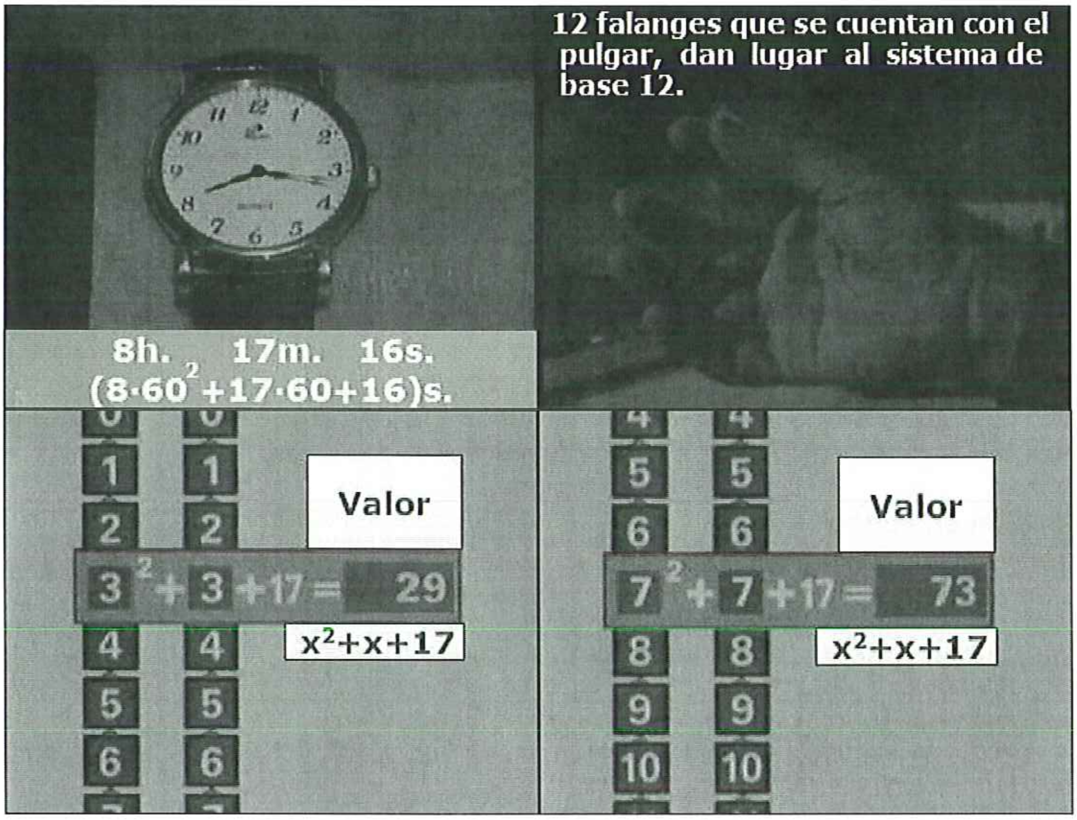
4 Polinomios

Objetivos

En esta quincena aprenderás:

- A trabajar con expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.
- La regla de Ruffini.
- El teorema del resto.
- A reconocer los polinomios con coeficientes reales irreducibles.
- A factorizar polinomios con raíces enteras.

Antes de empezar



Expresiones polinómicas y valor numérico

Si el número 235 está dado en **base 10** su expresión polinómica es

$2\cdot\mathbf{10}^2 + 3\cdot\mathbf{10} + 5$, valor numérico en **10** de la expresión $2\cdot\mathbf{x}^2 + 3\cdot\mathbf{x} + 5$.

Para medir ángulos o el tiempo se usa la **base sexagesimal,** así 2 horas 3 minutos 5 segundos es igual a

$2\cdot\mathbf{60}^2 + 3\cdot\mathbf{60} + 5$ segundos, valor numérico en **60** de $2\cdot\mathbf{x}^2 + 3\cdot\mathbf{x} + 5$.

Para expresar la cantidad de color se utiliza el sistema de **base 16** o **hexadecimal,** así 48 en este sistema es igual a

$4\cdot\mathbf{16} + 8$ en base 10, valor numérico en **16** de la expresión $4\cdot\mathbf{x}+8$.

El lenguaje de los ordenadores esta basado en el **sistema binario o de base 2**, con solo dos cifras el 0 y el 1; el valor decimal de la expresión binaria 11001 es

$\mathbf{2}^4+\mathbf{2}^3+1$, valor numérico en **2** de la expresión $\mathbf{x}^4+\mathbf{x}^3+1$.

1. Monomios y polinomios

Expresiones algebraicas

Son muchas las situaciones en las que se utilizan expresiones algebraicas (sumas, diferencias, productos cocientes y potencias de números y letras), en la derecha se presentan algunas.

Cuando la expresión algebraica es de estos tipos:

$\mathbf{3xy^2}$; $\mathbf{2x^{10}}$; $\mathbf{3/4 \cdot x^2 \cdot y^5}$

solo con productos de números y potencias de variables de exponente natural, se denomina **monomio**. **La suma de varios monomios es un polinomio.**

Observa cómo se determinan el **grado** y **los coeficientes** de los ejemplos:

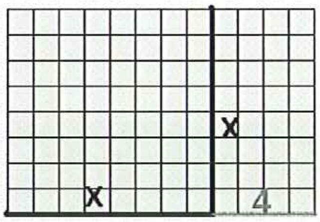
$\mathbf{3xy^4}$ es un momomio de dos variables con **coeficiente 3** de **grado 5**, uno por la x y cuatro por la y.

El coeficiente de $\mathbf{3/4\ x^2y^5}$ es **3/4** y **su grado 7**.

El polinomio $\mathbf{3x^5+4x^2-2}$ es de **grado 5**, el mayor grado de sus monomios, sus coeficientes son:

3 de grado 5, **0** de 4, **0** de 3, **4** de 2, **0** de 1 y **-2** de 0.

a) Halla la expresión algebraica que da el número de cuadraditos del rectángulo.



b) ¿Qué monomio nos da los km recorridos a una velocidad de x km/h durante t horas?

Soluciones: a) x^2+4x b) $x \cdot t$

Expresión en coeficientes

Un polinomio se puede definir mediante la expresión en coeficientes que consiste en dar todos sus coeficientes ordenados, empezando por el de grado mayor y terminando por el de grado cero así $\mathbf{x^2+2x}$ se expresa por **1 2 0.**

Más ejemplos

Polinomio	Coeficientes
$\sqrt{2}\,x^3$	$\sqrt{2}$ 0 0 0
$2x^3-\frac{4}{5}$	2 0 0 $-\frac{4}{5}$
x^3+4x^2+3x-2	1 4 3 -2

Es claro que dos polinomios son iguales si y solo si coinciden sus expresiones en coeficientes.

Polinomio

$3x^4+0x^3+1x^2+(-5)x^1+3x^0$

Manera usual de escribir el polinomio

$3x^4+x^2-5x+3$

$P(x) = x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 4x^2$

$Q(x) = x^5 + ax^4 - 2x^3 - 4x^2$

Si P(x)=Q(x), **a**=2

Valor numérico de un polinomio

La notación numérica que utilizamos tiene mucho que ver con los polinomios. Si en el polinomio de coeficientes **5 2 3**,

$$\mathbf{5}x^2 + \mathbf{2}x + \mathbf{3}$$

sustituimos la x por 10, resulta

$$\mathbf{5}\cdot 10^2 + \mathbf{2}\cdot 10 + \mathbf{3} = \mathbf{523},$$

hemos vuelto a la expresión en coeficientes del polinomio, igual ocurre en el sistema sexagesimal con el que contamos las horas, minutos y segundos, si en el polinomio anterior sustituimos la x por 60

$$\mathbf{5}\cdot 60^2 + \mathbf{2}\cdot 60 + \mathbf{3}$$

obtenemos los 18123 segundos que hay en

5 horas **2** minutos y **3** segundos.

523 es el valor numérico del polinomio en 10 y 18123 es el valor numérico de ese mismo polinomio en 60.

$P(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{3}{4}$

Valor de x → -1

$P(-1) = -\frac{5}{3}(-1)^3 + \frac{5}{6}(-1)^2 + \frac{3}{4}$

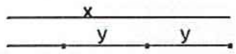
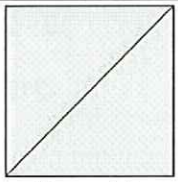
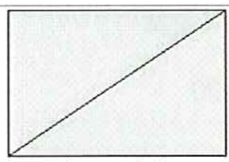
Valor del polinomio en -1 → $\frac{13}{4}$

Puedes utilizar la calculadora para hallar el valor numérico de un polinomio. Recuerda que para realizar la potencia 2^4 se utiliza la tecla $\boxed{x^y}$,

2 $\boxed{x^y}$ 4 $\boxed{=}$ →16

EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas asociadas a cada imagen

Área del rectángulo x  y	 **Volumen, arista=x**	Longitud del segmento marrón 	Qué polinomio expresa la **media aritmética de** dos números **x, y**
El triple de un número menos cinco	La suma de los cuadrados de dos números	 La diagonal de un cuadrado de lado x	 La diagonal de un rectángulo de base x y altura y

Soluciones

$x\cdot y$ Polinomio de grado 2 y dos variables	x^3 Monomio de grado 3	x-2y Polinomio de grado1 Dos variables	0,5x+0,5y Polinomio de grado1 Dos variables
3x-5 Polinomio de grado 1 Una variable	x^2+y^2	$\sqrt{2}\cdot x$	$\sqrt{x^2+y^2}$

2. Escoge la expresión algebraica en cada caso

1 El triple de un número más seis Ⓐ $6x+3$ Ⓑ $3x+6$ Ⓒ $3(x+6)$ Ⓓ $\frac{x}{3}+6$	2 La quinta parte de un nº más 10. Ⓐ $\frac{x}{5}+10$ Ⓑ $\frac{x+10}{5}$ Ⓒ $10x+5$ Ⓓ $5x+10$	3 Un cuarto de la suma un nº más 7. Ⓐ $\frac{x+7}{4}$ Ⓑ $\frac{x}{4}+7$ Ⓒ $\frac{14+7}{4}$ Ⓓ $\frac{7}{4}+x$	4 La semisuma de dos números. Ⓐ $\frac{x\cdot y}{2}$ Ⓑ $\frac{x+y}{2}$ Ⓒ $\frac{x}{2}+y$ Ⓓ $\frac{x-y}{2}$	5 La mitad del producto de 2 nºs. Ⓐ $\frac{x}{2}\cdot y$ Ⓑ $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}$ Ⓒ $\frac{x-y}{2}$ Ⓓ $\frac{x\cdot 7}{2}$
6 La raíz cuadrada de la suma de 2 cuadrados. Ⓐ $x+y$ Ⓑ x^2+y^2 Ⓒ $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}$ Ⓓ $\sqrt{x^2+y^2}$	7 El 40% de un número. Ⓐ $0.4\ x$ Ⓑ $\frac{40}{100\,x}$ Ⓒ $\frac{40}{10}x$ Ⓓ $\frac{100\,x}{40}$	8 El cuadrado de la suma de 2 números. Ⓐ $(z+y)^2$ Ⓑ x^2+y^2 Ⓒ $x+y^2$ Ⓓ $(12+y)^2$	9 El cuadrado de la semisuma de 2 números. Ⓐ $\frac{x^2+y^2}{4}$ Ⓑ $\frac{x+y^2}{2}$ Ⓒ $\frac{(x+y)^2}{4}$ Ⓓ $\frac{(x+y)^2}{2}$	10 La media aritmética de tres números Ⓐ $0.5x+0.5y+0.5z$ Ⓑ $\left(\frac{x+y}{2}+z\right)/2$ Ⓒ $\frac{x+y+z}{3}$ Ⓓ $\frac{x+y+z}{2}$

Soluciones: 1 B; 2 A; 3 A; 4 B; 5 A; 6 D; 7 A; 8 A; 9 C; 10 C.

EJERCICIOS resueltos

3. Halla los valores numéricos indicados en cada caso.

$\boxed{2-7\cdot x^5 \text{ en } (-2)}$	$\boxed{3+5\cdot x^3 \text{ en } \frac{2}{3}}$	$\boxed{3\sqrt{x}-3\cdot x^3 \text{ en } 9}$	$\boxed{\frac{x^5}{y^3}+4 \text{ en } \begin{matrix}x=-2\\ y=3\end{matrix}}$	$\boxed{\frac{x^5}{y^4}+1 \text{ en } \begin{matrix}x=4\\ y=4\end{matrix}}$
$2-7\cdot(-2)^5$	$3+5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$3\sqrt{9}-3\cdot 9^3$	$\frac{(-2)^5}{3^3}+4$	$\frac{4^5}{4^4}+1$
$2-7\cdot -32$	$3+5\cdot\frac{8}{27}$	$3\cdot 3-3\cdot 729$	$\frac{-32}{27}+4$	4^1+1
$2+224$	$3+\frac{40}{27}$	$9-2187$		$4+1$
226	$\frac{121}{27}$	-2178	$\frac{76}{27}$	5

4. Valor numérico en -3

$2\cdot x^2+5\cdot x+6$	Sustituye x por (-3)
$2\cdot(-3)^2+5\cdot(-3)+6$	Realiza la potencia de (-3)
$2\cdot 9+5\cdot(-3)+6$	Efectúa los productos
$18+(-15)+6$	Opera
9	Este es el valor del polinomio para x=-3. Pulsa el botón > de la esquina superior.

5. Valor numético en 0.1

$3\cdot x^2+7\cdot x+2$	Sustituye x por 0.1
$3\cdot 0.1^2+7\cdot 0.1+2$	Efectua las potencias
$3\cdot 0.01+7\cdot 0.1+2$	Realiza los productos
$0.03+0.7+2$	Escribe el resultado
2.73	

6.

x^3+4x-2

¿Cuál es el grado del polinomio? ☐

☐ ☐ ☐ ☐

Escribe los coeficientes en los recuadros.

Solución: grado 3.

Coeficientes: 1 0 4 -2

$x^4-2x^3-x^2-2x$

¿Cuál es el grado del polinomio? ☐

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

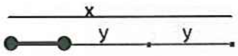
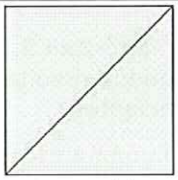
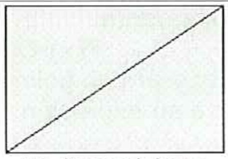
Escribe los coeficientes en los recuadros.

Solución: grado 4.

Coeficientes: 1 -2 -1 -2 0

EJERCICIOS resueltos

1. Halla las expresiones algebraicas asociadas a cada imagen

x **Área del rectángulo** y	 **Volumen, arista=x**	Longitud del segmento marrón 	Qué polinomio expresa la **media aritmética de** dos números **x, y**
El triple de un número menos cinco	La suma de los cuadrados de dos números	 La diagonal de un cuadrado de lado x	 La diagonal de un rectángulo de base x y altura y

Soluciones

$x \cdot y$ Polinomio de grado 2 y dos variables	x^3 Monomio de grado 3	x-2y Polinomio de grado1 Dos variables	0,5x+0,5y Polinomio de grado1 Dos variables
3x-5 Polinomio de grado 1 Una variable	x^2+y^2	$\sqrt{2} \cdot x$	$\sqrt{x^2+y^2}$

2.

x	**-4**	El grado de P(x) es **7**
-5	**-2**	El coeficiente de mayor grado es **-2**
+5	**x^7**	El coeficiente de grado 3 es **-5**
x^5	**x^2**	El coeficiente de grado 2 es **-3**
x^3	**-3**	El coeficiente de grado 1 es **5**
		Los demás coeficientes son cero

Solución $\boxed{\mathbf{P(x)=-2x^7-4x^5-5x^3-3x^2+5x}}$

3. Halla la expresión en coeficientes de los polinomios $P(x)=3x^2-2x+1$; $Q(x)=x^3-4$; $R(x)=0,5x^2+3x$
Las respectivas expresiones en coeficientes son:
P(x)→ 3 -2 1; Q(x)→ 1 0 0 -4; R(x)→ 0,5 3 0

4. Escribe las expresiones polinómicas de los polinomios cuya expresión en coeficientes es:
P(x)→ 1 0 3 -1; Q(x)→ 3 2 0 0; R(x)→ 3/2 -3 0 5
$P(x)=x^3+3x-1$; $Q(x)=3x^3+2x^2$; $R(x)=3/2\,x^3-3x^2+5$

5. Halla el valor numérico en 1, 0 y –2 de los siguientes polinomios:

POLINOMIO	Valor en 1	Valor en 0	Valor en -2
$x^5-2x^3-x^2$	-2	0	-20
$x^2/5-1$	-5/5	-1	-1/5
$-2x^3+\pi x^2$	$-2+\pi$	0	$16+4\pi$
$-x^3+1,2x^2-1/5$	0	-1/5	63/5
$-\sqrt{2}\,x^2+1$	$-\sqrt{2}+1$	1	$-4\sqrt{2}+1$

2. Operaciones

Suma y diferencia

Para sumar o restar polinomios se juntan los monomios de igual grado y se suman o restan

$$P(x)=5x^3+2x^2+3x+4$$
$$Q(x)=6x^3+7x^2+5x+1$$
$$P(x)+Q(x)=5x^3+2x^2+3x+4\ +\ 6x^3+7x^2+5x+1=$$
$$=5x^3+6x^3+2x^2+7x^2+3x+5x+4+1=$$
$$=\mathbf{11x^3+9x^2+8x+5}$$

Análogamente

$$P(x)-Q(x)=\mathbf{-x^3-5x^2-2x+3}$$

Para operar con polinomios puede resultar cómodo pasar a su expresión en coeficientes.

Suma $P(x)=8x^4+x^2-5x-4$

$Q(x)=3x^3+x^2-3x-2$

Se suman los coeficientes de igual grado:

P(x)→	8	0	1	-5	-4
Q(x)→		3	1	-3	-2
P(x)+Q(x)→	8	3	2	-8	-6

$P(x)+Q(x)=8x^4+3x^3+2x^2-8x-6$

Producto

Los polinomios se multiplican monomio a monomio, aplicando la propiedad distributiva del producto,

así si $P(x)=2x^3+3x+4$ y $Q(x)=x^2+5x$

$$P(x)\cdot Q(x)=(2x^3+3x+4)\cdot(x^2+5x)=$$
$$=2x^3x^2+3xx^2+4x^2+2x^35x+3x5x+4\cdot 5x=$$
$$=2x^5+3x^3+4x^2+10x^4+15x^2+20x$$

Y ordenamos los monomios según su grado,

$$2x^5+10x^4+3x^3+4x^2+15x^2+20x=$$
$$=\mathbf{2x^5+10x^4+3x^3+19x^2+20x}$$

$P(x)=3x^3+5x-4$

$Q(x)=x^2-x+2$

Se multiplican coeficiente a coeficiente:

P(x)→			3	0	5	-4
Q(x)→				1	-1	2
			6	0	10	-8
		-3	0	-5	4	
	3	0	5	-4		
P(x)·Q(x)→	3	-3	11	-9	14	-8

$P(x)\cdot Q(x)=3x^5-3x^4+11x^3-9x^2+14x-8$

Factor x^n

Dos monomios pueden tener como factor común una potencia de **x** y un factor de sus coeficientes. Los monomios del siguiente polinomio

$$6x^5+15x^2$$

tienen en común la potencia x^2 pues $x^5=x^3\cdot x^2$

$$6x^3\mathbf{x^2}+15\mathbf{x^2}=(6x^3+15)\mathbf{x^2}$$

y sus coeficientes, 6 y 15 tienen como factor común el número 3 pues $6=2\cdot 3$ y $15=5\cdot 3$,

$$(6x^3+15)x^2=(2\cdot\mathbf{3}\cdot x^3+5\cdot\mathbf{3})x^2=(2x^3+5)\mathbf{3}x^2$$

Diferencia $P(x)=3x^3+x^2+5x+4$

$Q(x)=3x^3+3x+2$

Se restan los coeficientes de igual grado:

P(x)→	3	1	5	4
Q(x)→	3	0	3	2
P(x)-Q(x)→		1	2	2

$P(x)-Q(x)=x^2+2x+2$

Observa el grado del resultado:
$gr(P\pm Q)\leq max(gr(P), gr(Q))$

Para multiplicar el paréntesis por 4 hay que multiplicar los dos monomios.

$$(x^2\ \ +3x\ \ ).4$$
$$(x^2.4+3x.4)$$

$gr(P\cdot Q)=gr(P)+gr(Q)$

$$2\boxed{x^9}+\boxed{x^6}-3x^4=$$
$$=2\boxed{x^4\cdot x^5}+\boxed{x^4\cdot x^2}-3\cdot x^4$$

x^4 está en todos los sumandos.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$
$$=\ x^4\cdot(\ 2x^5+x^2-3)$$

Se ha sacado factor común una potencia de x.

$P(x) = 18x^6+27x^4$

Factor común → $\boxed{9}\ x^{\boxed{4}}$

$P(x) = (2x^2+3\ \ )\ 9x^4$

EJERCICIOS resueltos

6. Halla P(x)+Q(x) y 3·P(x)-Q(x)

$P(x)=x^4+2x^3+3x \qquad Q(x)=2x^3+x^2-3x+5$

P(x)→	1	2	0	3	0
Q(x)→		2	1	-3	5
P(x)+Q(x)→	1	4	1	0	5

3·P(x)→	3	6	0	9	0
Q(x)→		2	1	-3	5
3·P(x)-Q(x) →	3	4	-1	12	-5

$\mathbf{P(x)+Q(x)=x^4+4x^3+x^2+5}$ $\qquad$ $\mathbf{3\cdot P(x)-Q(x)=3x^4+4x^3-x^2+12x-5}$

7. Multiplica $P(x)=x^3+6x^2+4x-6$ por $Q(x)= x^3+3x^2+5x-2$

P(x)→				1	6	4	-6
Q(x)→				1	3	5	-2
				-2	-12	-8	12
			5	30	20	-30	
		3	18	12	-18		
	1	6	4	-6			
P(x)·Q(x)→	1	9	27	34	-10	-38	12

$\mathbf{P(x)\cdot(Q(x)=x^6+9x^5+27x^4+34x^3-10x^2-38x+12}$

8. Suma P(x) y Q(x)

$P(x)= 5x^3 \;+\frac{3}{2}x^2 \;-\frac{4}{5}x$

$Q(x)= x^3 \;-\frac{5}{2}x$

$P(x)\text{-}Q(x)= 4x^3 \;+\frac{3}{2}x^2 \;+\frac{17}{10}x$

Multiplica P(x) y Q(x)

$P(x)= -\,5x^{10} \;+2x^8$

$Q(x)= -\,5x^9 \;+x^8$

$P(x)\cdot Q(x)= 25x^{19} \;-5x^{18} \;-10x^{17} \;+2x^{16}$

9. Saca factor común

$\mathbf{P(x)= 4x^{13} - 4x^{11} - 6x^5 - 3x^4}$	$P(x)= x^4\cdot (4x^9 - 4x^7 - 6x - 3)$
$\mathbf{P(x)= -8x^{10} + 6x^9 - 2x^3 - 4x^2}$	$P(x)= -2x^2\cdot (4x^8 - 3x^7 + x + 2)$
$\mathbf{P(x)= 6x^5 + x^2 - 4x}$	$P(x)= x\cdot (6x^4 + x - 4)$

3. Identidades notables

Suma al cuadrado

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ x & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2+2ab+ & & b^2 \end{array}$$

La suma al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

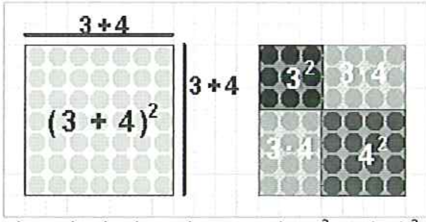
Diferencia al cuadrado

$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$

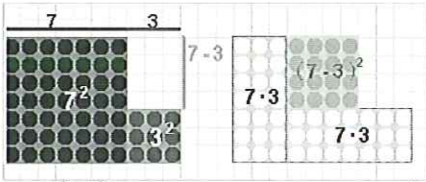
Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ x & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2-2ab+ & & b^2 \end{array}$$

La diferencia al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º



El cuadrado de a+b es igual a $a^2+2ab+b^2$



Si a a^2+b^2 le quitamos 2ab, resulta $(a-b)^2$

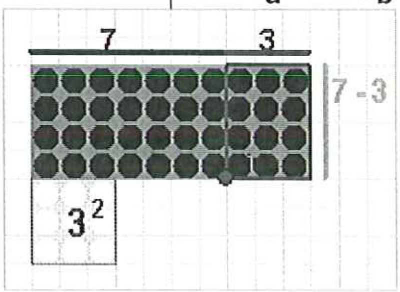
Suma por diferencia

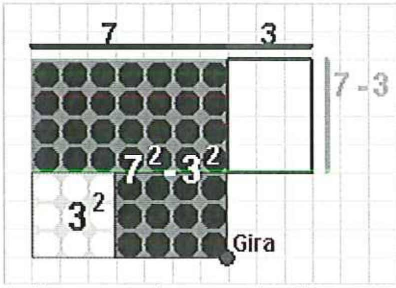
$(a+b)\cdot(a-b)= a^2 - b^2$

La suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ x & a & -b \\ \hline & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$





Arriba en azul vemos la diferencia de cuadrados y a la izquierda la suma por la diferencia, basta girar un rectángulo y trasladarlo para ver que las dos figuras azules coinciden.

Debes aprender estas igualdades en los dos sentidos, es decir, si nos dan la expresión

$$x^2 - 6x + 9$$

la debemos identificar con

$$(x + 3)^2$$

y si nos dan la expresión

$$(2x - 5)^2$$

la expresaremos como

$$4x^2 - 20x + 25$$

Análogamente, debemos reconocer la diferencia de cuadrados como suma por diferencia:

$$24^2 - 23^2 = 24 + 23$$

Y sabremos ver la suma por diferencia como diferencia de cuadrados:

$$(x + 3)\cdot(x - 3) = x^2 - 9$$

CÁLCULO MENTAL

$$121^2 - 120^2$$

Si se aplican las identidades notables basta sumar 121 y 120 para hacer este cálculo.

EJERCICIOS resueltos

10. Observa cómo se aplican las identidades notables

Para desarrollar $(x+5)^2$

Cuadrado del 1º→x^2. Doble del 1º por el 2º→$2\cdot x\cdot 5=10x$. Cuadrado del 2º→$5^2=25$

por tanto $(x+5)^2=x^2+10x+25$

Para descomponer el polinomio x^2-8x+16 se intenta ver uno de los miembros de una identidad notable, al ser los signos de los coeficientes alternativos, + - +, se compara con la diferencia al cuadrado.

$16=4^2$ y $8x$=doble de x por 4→ $x^2-8x+16=(x-4)^2$

Para descomponer el polinomio $4x^2$ –9 se intenta ver si es una identidad notable, al ser 0 el coeficiente de grado uno se compara con la diferencia de cuadrados

$4x^2=(2x)^2$; $9=3^2$ → $4x^2-9=(2x+3)\cdot(2x-3)$

11. Desarrolla las siguientes expresiones

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$(x+1)^2$	x^2+2x+1	$(x-1)^2$	x^2-2x+1
$(2x+1)^2$	$4x^2+4x+1$	$(3-2x)^2$	$4x^2-12x+9$
$(3x/2+5)^2$	$9x^2/4+15x+25$	$(x/3-2)^2$	$x^2/9-4x/3+4$
$(\sqrt{2}\,x+2)^2$	$2x^2+4\sqrt{2}\,x+4$	$(x-\sqrt{3}\,)^2$	$x^2-2\sqrt{3}\,x+3$

12. Halla la expresión en coeficientes de los siguientes productos

Productos	Solución	Productos	Solución
$(x+2)\cdot(x-2)$	x^2-4; 1 0 -4	$(x-1/4)\cdot(x+1/4)$	1 0 -1/16
$(3x+7)\cdot(3x-7)$	9 0 -49	$(1+\sqrt{2}\,x)\cdot(1-\sqrt{2}\,x)$	-2 0 1

13. Resuelve aplicando las identidades notables la ecuación $x^2+10x+9=0$

Se compara la primera parte, $\mathbf{x^2+10x}$, con una identidad notable, con $(x+5)^2$

Pues $(x+5)^2=$ $\mathbf{x^2+10x}+25$, por tanto, $x^2+10x=(x+5)^2-25$

y el primer miembro de la ecuación es $\mathbf{x^2+10x}+9\mathbf{=(x+5)^2-25}+9$,

$(x+5)^2-16=0$→ $(x+5)^2-4^2=0$→ $(x+5+4)\cdot(x+5-4)=0$ → Soluciones x=-9 y x=-1

14. Aplica las identidades notables para descomponer en factores los siguientes polinomios

Expresión	Solución	Expresión	Solución
$4x^2+12x+9$	$(2x+3)^2$ o $9(2x+1)^2$	$49x^2-36$	$(7x+6)\cdot(7x-6)$
$36x^2+36x+9$	$(6x+3)^2$ o $9(2x+1)^2$	$25x^2-9/4$	$(5x+3/4)\cdot(5x-3/4)$
$6x^5-12x^4+6x^3$	$6x^2(x-1)^2$	$4x^2-3$	$(2x+\sqrt{3})\cdot(2x-\sqrt{3})$

15. Escribe 7^2 como la diferencia de los cuadrados de dos números naturales.

49 es la suma de dos números consecutivos, por tanto, $49=25^2-24^2$.

Para practicar

1. Halla la expresión algebraica de un número de cuatro cifras, xyzt, sabiendo que la cifras de las unidades es tres veces la cifra de las decenas.

2. De lunes a jueves camino x Km. diarios y de viernes a domingo, 6 Km. cada día. Halla la expresión algebraica que da los Km. que camino en z semanas

3. Si practico ciclismo a una velocidad media de 45 Km./h. Durante t horas al mes.¿Cuántos Km. hago al cabo de un año?

4. Mi sueldo mensual es de 1400€. Cada año aumenta un x%. Calculara el sueldo mensual dentro de dos años.

5. 2·Π·radio es la expresión que define la longitud de la circunferencia en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿la longitud para un radio de 3 cm?

6. $\pi\cdot\text{radio}^2$ es la expresión que define el área del círculo en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el área para un radio de 12 cm?

7. $4\cdot\pi\cdot\text{radio}^2$ es la expresión que define el área de la esfera en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el área para un radio de 15 cm?

8. $4\cdot\pi/3\cdot\text{radio}^3$ es la expresión que define el volumen de la esfera en función de su radio. ¿Cuál es la variable? ¿el grado? ¿el coeficiente? ¿el volumen para un radio de 6 cm

9. ¿Cuál es el grado del polinomio $-4x^3-6x^2$? ¿Cuál es su coeficiente de grado dos? ¿y el de grado uno? Calcula su valor numérico en x=-1

10. ¿Qué fracción de hora son 51 minutos y 14 segundos? ¿Sabes expresarla como el valor numérico de un polinomio de 2º grado?

11. ¿Cuántos segundos hay en 5h. 35min. y 53 seg.? ¿Sabes expresarlos como el valor numérico de un polinomio de 2º grado?

12. ¿Cuántas unidades hay en 5 masas, 8 gruesas y 6 docenas? ¿Sabes expresarlas como el valor numérico de un polinomio de tercer grado?

    Una masa=12 gruesas, una gruesa=12 docenas, una docena= 12 unidades.

13. Halla los coeficientes de P(x)-3·Q(x)

    $P(x)=-7x^3+2x^2-x-2$

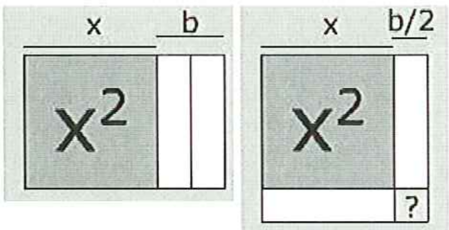
    $Q(x)=6x^3-2x^2+x-2$

14. Halla los coeficientes de P(x)·Q(x)

    $P(x)=7x^2+5x \quad Q(x)=-4x^3+7x^2-x-3$

15. Saca factor común en el polinomio $4x^{12}+24x^7$

16. ¿Cuántas unidades tienes que añadir a x^2+16x para convertir este binomio en el cuadrado de otro binomio?



17. Calcula a) $(x+6)^2$ b) $(-2x+5)^2$

    c) $(2x-3/2)\cdot(2x+3/2)$

18. Calcula mentalmente 32^2-31^2 y 19·21

19. Halla la expresión algebraica que define el producto de tres números enteros consecutivos. Toma como x el número central.

20. Simplifica las fracciones

    a) $\dfrac{x^2+4x+4}{3x+6}$ b) $\dfrac{4x^2-4}{x^2-2x+1}$

    c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{8x^2-2}$ d) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{2x^2-2y^2}$

Autoevaluación

1. Halla los coeficientes de $P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$ siendo $P(x)=6x+1$, $Q(x)=3x^2-2$ y $R(x)=x^2+14x$.

2. Calcula el valor numérico de $2x^3-5x^2+4$ en $x=2$.

3. Halla la expresión algebraica que define el área de 6 cuadrados de lado $x+y$ y 6 rectángulos de base x y altura y.

4. ¿Es cierta la igualdad $9x^2+30x+25=(3x+5)^2$?

5. Halla los coeficientes de $(2x+1)^2$.

6. ¿Qué constante hay que sumar a $25x^2-30x$ para obtener el cuadrado de un binomio?

7. Calcula el coeficiente de primer grado de $(4x-5)^2$.

8. Calcula mentalmente en menos de 10 segundos 34^2-33^2.

9. Simplifica la fracción $\frac{x^2-b^2}{x+b}$.

10. Saca factor común la mayor potencia de x en $5x^{19}+8x^8$.

2. División de polinomios

División

Para realizar la división **se dividen** los monomios de mayor grado, **se multiplica** y se cambia de signo, y **se suma.** Este proceso se repite hasta obtener un resto de grado menor que el del divisor.
La división de polinomios debe cumplir estas dos condiciones:

Dividendo=divisor·cociente+resto
gr(resto)<gr(divisor)

El grado del cociente es la diferencia de los grados del Dividendo y del divisor. Cuando el resto es cero, se dice que el dividendo es divisible entre el divisor.

División por coeficientes

A continuación se ve una division de polinomios con la expresión en coeficientes, algunas veces puede ser conveniente este método o simplemente será cuestión de preferencias elegir un método u otro.

Dividimos

$6x^3 - 7x^2 - 10x + 5$ | $3x^2 + x - 2$
$2x$

Multiplicamos y cambiamos de signo

$6x^3 - 7x^2 - 10x + 5$ | $3x^2 + x - 2$
$-6x^3 - 2x^2 + 4x$ | $2x$

Sumamos.

$6x^3 - 7x^2 - 10x + 5$ | $3x^2 + x - 2$
$-6x^3 - 2x^2 + 4x$ | $2x$
$-9x^2 - 6x + 5$

Dividimos

$6x^3 - 7x^2 - 10x + 5$ | $3x^2 + x - 2$
$-6x^3 - 2x^2 + 4x$ | $2x - 3$
$-9x^2 - 6x + 5$

Multiplicamos y cambiamos de signo

$6x^3 - 7x^2 - 10x + 5$ | $3x^2 + x - 2$
$-6x^3 - 2x^2 + 4x$ | $2x - 3$
$-9x^2 - 6x + 5$
$9x^2 + 3x - 6$

Sumamos.

$6x^3 - 7x^2 - 10x + 5$ | $3x^2 + x - 2$
$-6x^3 - 2x^2 + 4x$ | $2x - 3$ cociente
$-9x^2 - 6x + 5$
$9x^2 + 3x - 6$
$-3x - 1$ resto

$-6x^3 + 16x^2 - 5x + 1$ | $-3x + 2$
$6x^3 - 4x^2$ | $2x^2 - 4x - 1$ cociente
$12x^2 - 5x + 1$
$-12x^2 + 8x$
$3x + 1$
$-3x + 2$
3 resto

$-12x^2 + 2x + 4$ | $-4x^2 + x + 2$
$12x^2 - 3x - 6$ | 3 cociente
$-x - 2$ resto

$-2x^3 - 6x^2 - 4x - 4$ | $2x$
$2x^3$ | $-x^2 - 3x - 2$ cociente
$-6x^2 - 4x - 4$
$6x^2$
$-4x - 4$
$4x$
-4 resto

$P(x)= 2x^3-2x^2+4x+2$ $\quad Q(x)= x^2+4x+3$

P(x) Dividendo | Q(x) divisor
2 -2 4 2 | 1 4 3
-2 -8 -6 | 2 -10
-10 -2 2 | cociente
10 40 30 | 2x-10
resto 38 32
38x+32

$P(x)= 28x^3+5x-6$ $\quad Q(x)=4x^2+5$

P(x) Dividendo | Q(x) divisor
28 0 5 -6 | 4 0 5
-28 0 -35 | 7 0
0 -30 -6 | cociente
0 0 0 | 7x
resto -30 -6

$P(x)= 5x^2-6x+7$ $\quad Q(x)=6x+6$

P(x) Dividendo | Q(x) divisor
5 -6 7 | 6 6
-5 -5 | $\frac{5}{6}$ $\frac{11}{-6}$
-11 7 | cociente
11 11
18 resto

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es útil para dividir polinomios entre x-a.

En el ejemplo de la derecha se divide $3x^3-5x^2+1$ entre x-2, obteniendo de cociente $3x^2+x+2$ y de resto 5.

La regla explicada para **a=2**, vale también cuando **a** es un número racional o real, en el siguiente ejemplo se toma **a=-3/2** y representa la división de $4x^2+5x+2$ entre x+3/2

	4	5	2
-3/2		-6	3/2
	4	**-1**	**7/2 resto**

cociente
4x-1

Teorema del resto

Al dividir un polinomio P(x) por (x-a) el resto es siempre de grado cero y se obtiene un cociente C(x) que verifica:

$$P(x)=(x-a)\cdot C(x)+\text{resto}$$

Si sustituimos ahora la x por a,

$$P(a) = (a-a)\cdot C(a) + \text{resto}$$

En la igualdad anterior (a-a)=0, por tanto,

valor numérido de P en a = resto

Este resultado se conoce como **teorema del resto**

Así el valor numérico P(x) en a será cero cuando P(x) sea divisible por (x-a), es decir, el resto de P(x) entre x-a es cero, en este caso decimos que **a es raíz** del polinomio P(x).

Recuerda

a es raíz de P(x)⇔ P(x)=(x-a)·C(x) ⇔ P(a)=0

El teorema se puede aplicar para calcular algunos valores numéricos.

$P(x) = x^3 + 15x^2 + 12x + 4$

Hallar $P(-14) = (-14)^3 + 15\cdot(-14)^2 + 12\cdot(-14) + 1$

	1	15	12	4
-14		-14	-14	28
	1	1	-2	$\boxed{32}$

También se utiliza nos para resolver problemas como el siguiente, hallar m para que el polinomio

$$P(x)=x^3+mx-4$$

sea divisible por x-2, que se resuelve sustituyendo la x por 2, igualando a 0 y despejando m, así m=-2.

Observa la división y como se realiza la Regla de Ruffini paso a paso

3	-5	0	1	| 1	-2
-3	6			3 1 2	
	1	0		cociente	
	-1	2			
		2	1		
		-2	4		
			5 resto		

Regla de Ruffini

	3	-5	0	1
2	↓			
	3			

	3	-5	0	1
2		6		
	3			

Se multiplican

	3	-5	0	1
2		6		
	3	1		

Se suman

	3	-5	0	1
2		6		
	3	1		

Se multiplican

	3	-5	0	1
2		6	2	
	3	1	2	

Se suman

Se vuelve a multiplicar y a sumar obteniendo

	3	-5	0	1	
2		6	2	4	
	3	1	2	5	resto

cociente

Con la calculadora

Para calcular el valor numérico de un polinomio con la calculadora, valor de $P(x)= 3x^3-5x^2+1$ en x=2

Podemos aplicar la regla de Ruffini, para ello teclea la siguiente secuencia:

2 [M in] [x] 3 → 3
[-]5 [=] → 1
[x] [MR] [+] 0 [=] → 2
[x] [MR] [+] 1 [=5]

Obtenemos: [5] que es el resto de dividir P(x) para x-2 y el valor numérico en x=2.

De paso han ido saliendo los coeficientes del cociente cada vez que se pulsaba [=].

EJERCICIOS resueltos

7. Halla el cociente y el resto de la división de P(x) entre Q(x) en cada caso

a) $P(x)=3x^2-11x-13$ $Q(x)=x^2-3x-4$ b) $P(x)=-9x^3-15x^2+8x+16$ $Q(x)=3x+4$

Sol. Cociente=3 Resto=$-2x-1$ Sol. Cociente= $-3x^2-x+4$ Resto=0

8. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+5x^2-2x+1$, $Q(x)=2x^4-5$ y $R(x)=x^3-4x+3x^2$ entre x-3

	1	5	-2	1
3)		3	24	66
	1	8	22	67

Cociente $x^2+8x+22$

Resto 67

	2	0	0	0	-5
3)		6	18	54	162
	2	6	18	54	157

Cociente $2x^3+6x^2+18x+54$

Resto 157

	1	3	-4	0
3)		3	18	42
	1	6	14	42

Cociente $x^2+6x+14$

Resto 42

9. Aplica la regla de Ruffini para dividir $P(x)=x^3+3x^2-2x+1$, $Q(x)=x^4-2$ y $R(x)=x^3-4x^2-x$ entre x+1

	1	3	-2	1
-1)		-1	-2	4
	1	2	-4	5

Cociente x^2+2x-4

Resto 5

	1	0	0	0	-2
-1)		-1	1	-1	1
	1	-1	1	-1	-1

Cociente x^3-x^2+x-1

Resto -1

	1	-4	-1	0
-1)		-1	5	-4
	1	-5	4	-4

Cociente x^2-5x+4

Resto -4

10. Si el valor numérico de un polinomio en 2 es igual a 3 y el cociente de su división de entre x-2 es x ¿Sabes de que polinomio se trata?

Dividendo = divisor·cociente +resto, el divisor es x-2, el cociente x y el resto 3, por tanto el polinomio es x^2-2x+3

11. Halla m para que mx^2+2x-3 sea divisible entre x+1

El polinomio será divisible entre x+1 si su valor en -1 es 0, luego ha de ser

m-2-3=0, es decir, m=5

12. Aplica el Terorema del resto y la regla de Ruffini para hallar el valor numérico de $P(x)=x^3-15x^2+24x-3$ en x=13

Aplicando la regla de Ruffini por x-13 da de resto −29, que es el valor numérico pedido.

13. ¿Existe algún valor de m para que el polinomio $x^3+mx^2-2mx+5$ sea divisible por x-2?

Por el teorema del resto basta resolver la ecuación $2^3+m\cdot 2^2-2m\cdot 2+5=0$, lo que da una igualdad imposible 13=0, por tanto no hay ningún valor de m para el cual el polinomio sea divisible por x-2

3. Descomposición factorial

Sacar factor común una potencia de x

Al descomponer un polinomio en factores lo primero que tendremos que observar es si se puede sacar factor común de todos los sumandos alguna potencia de x.

Esto será posible solo cuando el coeficiente de grado cero del polinomio sea nulo.

En la parte inferior puedes practicar esta extracción.

Tambien es interesante que busques, si es posible el m.c.d. de los coeficientes y lo extraigas como factor así en

$$6x^5+15x^2$$

se puede sacar factor común $3x^2$,

$$6x^5+15x^2=\mathbf{3}x^2(2x^3+5)$$

$$2\boxed{x^9}+\boxed{x^6}-3x^4=$$

$$=2\boxed{x^4\cdot x^5}+\boxed{x^4\cdot x^2}-3\cdot x^4$$

x^4 está en todos los sumandos.

$$2x^9+x^6-3x^4=$$

$$= \quad x^4\cdot(2x^5+x^2-3)$$

Se ha sacado factor común una potencia de x.

Polinomios de 2° grado

Recuerda la fórmula para resolver la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c=0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A b^2-4ac se le llama discriminante de la ecuación y se suele designar por Δ.

Esto determina la descomposición factorial de los polinomios de 2º grado:

Las soluciones de $2x^2-8x+6 =0$ son 1 y 3, luego $2x^2-8x+6 = 2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$, discriminante positivo.

Las soluciones de $3x^2+6x+3 =0$ son 1 y 1, luego $3x^2+6x+3=(x-1)2$, $\Delta =0$.

Las soluciones de $2x^2+6 = 0$ no son reales, b^2-4ac es negativo, $2x^2+6$ no descompone.

$-2x^2 + 20x - 48 = 0$

Paso 1: Identificar a,b y c

a= -2 ; b= 20 ; c= -48

Paso 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (20)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-48) = 16$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

$\Delta > 0$ Hay dos soluciones distintas puedes comprobar que son 6 y 4

Descomposición

$-2x^2 + 20x - 48 = -2\cdot(x-6)\cdot(x-4)$

$3x^2 + 54x + 243 = 0$

Paso 1: Identificar a,b y c

a= 3 ; b= 54 ; c= 243

Paso 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (54)^2 - 4\cdot(3)\cdot(243) = 0$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

$\Delta = 0$ Hay dos soluciones iguales puedes comprobar que es -9

Descomposición

$3x^2 + 54x + 243 = 3\cdot(x+9)^2$.

$-3x^2 + 4x - 8 = 0$

Paso 1: Identificar a,b y c

a= -3 ; b= 4 ; c= -8

Paso 2: Aplicar la fórmula $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-8) = -80$

Paso 3: Estudiar el número de soluciones

$\Delta < 0$ No hay solución

Descomposición

$-3x^2 + 4x - 8$ no descompone

Raíz	Raíz
2	-2
Divisor	Divisor
x-2	x+2

Regla de Ruffini reiterada

Si x-a es un divisor del polinomio P(x), se dice que **a es raíz** de P(x), por el teorema del resto sabemos que esto equivale a decir que P(a)=0.

$P(x)=p_n\mathbf{x}^n+p_{n-1}\mathbf{x}^{n-1}+...+p_1\mathbf{x}+p_0$ y **a raíz** de P(x),

$p_n\mathbf{a}^n+p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}+...+p_1\mathbf{a}+p_0=0$,

y despejando p_0

$p_0=-p_n\mathbf{a}^n-p_{n-1}\mathbf{a}^{n-1}-...-p_1\mathbf{a}$

Por tanto, si los coeficientes de P(x) son números enteros y **a** también, p_0 es múltiplo de **a**.

Las **raíces** enteras no nulas de un polinomio con coeficientes enteros, son **divisores del coeficiente de menor grado** del polinomio.

La descomposición de un polinomio de tercer grado con raíces 4, 1 y -2 será a·(x-4)·(x-1)·(x+2).

Se llama **multiplicidad** de una raíz al número de veces que aparece en la descomposición.

Descomposición factorial de $x^4-15x^2+10x+24$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 24

±1 ±2 ±3 ±4 ±6 ±8 ±12 ±24

Con la regla de Ruffini vamos viendo qué divisores son raíces

	1	0	-15	10	24
-1)		-1	1	14	-24
	1	**-1**	**-14**	**24**	**0**
2)		2	2	-24	
	1	1	-12	**0**	
3)		3	12		
	1	4	**0**		

$x^4-15x^2+10x+24=$
(x+1)·(x-2)·(x-3)·(x+4)

Identidades notables

Suma al cuadrado

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+2\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & b \\ \hline & ab & b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2+ & 2ab+ & b^2 \end{array}$$

La suma al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º

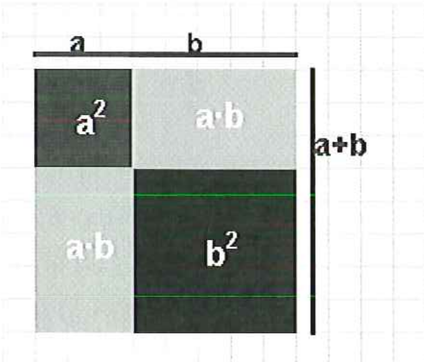
Diferencia al cuadrado

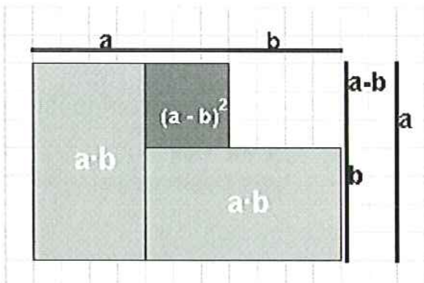
$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2-2\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}^2$

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & -b \\ \times & a & -b \\ \hline & -ab & b^2 \\ a^2 & -ab & \\ \hline a^2 & -2ab+ & b^2 \end{array}$$

La diferencia al cuadrado es igual a
cuadrado del 1º
+doble del 1º por el 2º
+cuadrado del 2º





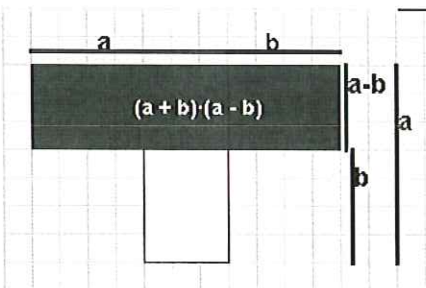
Suma por diferencia

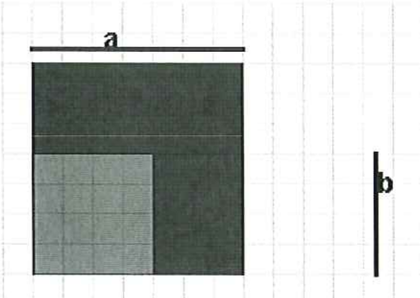
$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$

La suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.

Demostración

$$\begin{array}{rrr} & a & b \\ \times & a & -b \\ & -ab & -b^2 \\ a^2 & ab & \\ \hline a^2 & & -b^2 \end{array}$$





EJERCICIOS resueltos

14. Saca factor común una potencia de x en cada uno de los siguientes polinomios:
$P(x)=2x^3+3x$ $Q(x)= x^4+2x^6-3x^5$ $R(x)=2x^6+6x^5+8x^3$

Solución: $P(x)=x\cdot(2x^2+3)$ $Q(x)=x^4\cdot(2x^2-3x+1)$ $R(x)=2x^3\cdot(x^3+3x^2+4)$, en este último caso se ha podido sacar factor común también un número.

15. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}$

Las posibles raíces racionales de este polinomio son los divisores de 12

$\boxed{\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm12}$

Con la regla de Ruffini miramos que divisores son raíces del polinomio

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 4 & 12 \\ \mathbf{-1)} & & -1 & 8 & -12 \\ \hline & \mathbf{1} & \mathbf{-8} & \mathbf{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2)} & & 2 & -12 & \\ \hline & 1 & -6 & \mathbf{0} & \end{array}$$

$\boxed{\mathbf{x^3-7x^2+4x+12}=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-6)}$

16. Factoriza $2x^2-8x+6$; $-x^2+3x+4$; x^2+2x+3; x^2+6x+9.

$2x^2-8x+6=2\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ pues $2x^2-8x+6=0$ tiene por soluciones $x=1$; $x=3$.

$-x^2+3x+4=-(x+1)\cdot(x-4)$ pues $-x^2+3x+4=0$ tiene por soluciones $x=-1$; $x=4$.

x^2+2x+3 no descompone pues su discriminante es <0

$x^2+6x+9=(x+3)^2$ pues su discriminante es 0, luego tiene una raíz doble: $x=-3$.

17. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^7-x^6-4x^4}$

$\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x^3-x^2-4)$. Se ha sacado factor común x^4.
Las posibles raíces enteras de $x^3-x^2\mathbf{-4}$ son los **divisores de -4**:

$\boxed{1,-1,\ 2,-2,\ 4,-4}$

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 1) & & 1 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \mathbf{-4 \neq 0,} \end{array}$$

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ -1) & & -1 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \mathbf{-6 \neq 0} \end{array}$$

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si **2** es raíz de P

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ \mathbf{2)} & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \mathbf{0} \end{array}$$

2 es raíz de P

1 1 2 = x^2+x+2 La ecuación $x^2+x+2=0$ no tiene soluciones reales, por tanto es primo

$\boxed{\mathbf{x^7-x^6-4x^4}=x^4\cdot(x\mathbf{-2})\cdot(x^2+x+2)}$

EJERCICIOS resueltos

18. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4-4}$

Busquemos las raíces racionales de $\mathbf{x^4-4}$. Las posibles raíces en Q son los cocientes de los divisores de -4 (coeficiente de menor grado) entre los divisores de 1 (coeficiente de mayor grado),

divisores de -4	± 1	± 2	± 4

Es fácil ver con la regla de Ruffini que ninguno de los posibles valores son raíces de x^4-4. El polinomio no tiene raíces racionales.

Si se reconoce x^4-4 como una diferencia de cuadrados, $\mathbf{(x^2)^2-2^2}$ resultará fácil la descomposición factorial:
$x^4-4=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
El primer factor es primo, pero el segundo vuelve a ser una diferencia de cuadrados $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$

$$\boxed{\mathbf{x^4-4}=(x^2+2)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})}$$

19. Halla la descomposición factorial de $\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}$

Las posibles raíces enteras de $x^4+x^3-x^2-2x\mathbf{-2}$ son los **divisores de -2**:

$$\boxed{1,-1,\ 2,-2}$$

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
1)		1	0	-1	-3
	1	0	-1	-3	**-5 distinto de 0,**

1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si -1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-1)		-1	2	-1	3
	1	-2	1	-3	**1 distinto de 0,**

-1 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 2 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
2)		2	2	2	0
	1	1	1	0	**-2 distinto de 0,**

2 no es raíz de P

Veamos por la Regla de Ruffini si 1 es raíz de P

	1	-1	-1	-2	-2
-2)		-2	6	-10	24
	1	-3	5	-12	**22 distinto de 0,**

-2 no es raíz de P

$\boxed{\mathbf{x^4+x^3-x^2-2x-2}\text{ No tiene raíces enteras}}$

No podemos hallar la descomposición factorial de este polinomio.

Para practicar

1. Halla la expresión algebraica de un número de tres cifras si la cifra de las unidades es 4 veces la cifra de las decenas.

2. ¿Cuál es esl grado de $2x^5-x^3+3x^2$? ¿Su coeficiente de grado 3? ¿y el de grado 2? Calcula su valor numérico en x=2

3. Halla $P(x)-3\cdot Q(x)$ siendo $P(x)=4x^2+4x$ y $Q(x)=6x^2+2x$.

4. Multiplica los polinomios $P(x)=-3x^3+4x^2-x-2$ y $Q(x)=-x^2+7$.

5. Halla el cociente y el resto de la división de x^3+2x^2+5x-7 entre $-x^2+x-1$.

6. Haz la división de x^3+4x^2+2x-3 entre $x-2$ con la regla de Ruffini.

7. Aplica el teorema del resto para calcular el resto de la división de $2x^3-2x^2+x-7$ entre $x-5$.

8. a) Halla m para que $x^3+mx^2-2mx+6$ sea divisible por $x+2$

   b) Halla m para que $x^3+mx^2-8mx+4$ sea divisible por $x-1$.

9. Efectúa las potencias
   a) $(3x+2)^2$
   b) $(2x-4)^2$
   c) $(x-5)^2$

10. Descomponer, aplicando las identidades notables, los polinomio:
    a) $x^4-72x^2+36^2$
    b) x^4-16

11. Descomponer los siguientes polinomios, si es posible, aplicando la ecuación de segundo grado.
    a) $3x^2-10x+3$
    b) x^2-4x+5

12. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas

    a) $\dfrac{x^2+8x+16}{3x+12}$

    b) $\dfrac{3x^2-12}{x^2-4x+4}$

    c) $\dfrac{4x^2+4x+1}{12x^2-3}$

13. Saca factor común en $12x^{12}+24x^{10}$

14. Halla la descomposición en factores primos de los siguientes polinomios

    a) $3x^8-39x^7+162x^6-216x^5$

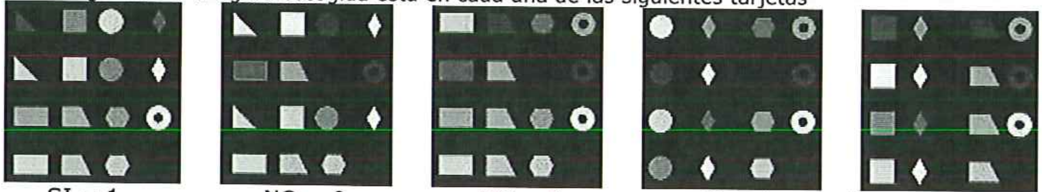
    b) $3x^9+12x^8+15x^7+6x^6$

15. Un polinomio de grado 3 tiene por raíces −5, 7 y 1. Halla su descomposición factorial sabiendo que su valor en 2 es 128.

16. ¿Cómo realizas mentalmente el cálculo de 23^2-22^2?

Para saber más

Pide a un compañero que memorice una figura del último cuadro pero que no diga cuál. Tu por telepatía la adivinarás. Pregúntale si la figura escogida está en cada una de las siguientes tarjetas

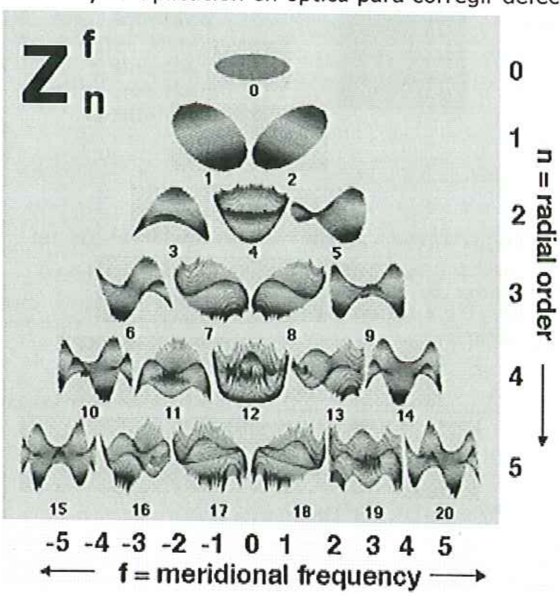


SI = 1 NO = 0 NO = 0 SI = 1 NO = 0

Con cada respuesta afirmativa escribe 1, con la negativa un 0, para el resultado **10010**, la figura es la $\mathbf{1}\cdot 2^4+\mathbf{1}\cdot 2=18$, el círculo verde. Solo hay que calcular el valor en 2 del polinomio cuyos coeficientes se obtienen con 1 o 0, con Sí o No.

Los polinomios en otras ciencias

Si investigas en la web, es probable que encuentres muchos polinomios con nombre propio: Polinomios de Lagrange, Hermite, Newton, Chevichev... copiamos aquí un extracto de un blog que habla de los polinomios de Zernike y su aplicación en óptica para corregir defectos visuales.



...Las matemáticas, con los polinomios de Zernike, nos ofrecen un método para descomponer superfices complejas en sus componentes más simples. **Así, con este procedimiento matemático podemos jerarquizar y definir todas las aberraciones visuales.** Un esquema que está presente con mucha frecuencia en las consultas de cirugía refractiva es el de las diferentes aberraciones agrupadas y jerarquizadas:

Lo de la jerarquía es fundamental, porque según cuál sea el grupo de la aberración, tendrá más o menos importancia, será más o menos fácil de corregir, etc. Por ejemplo, el número 4 corresponde a la miopía (y su inverso, la hipermetropía), y el 3 y 5 corresponden al astigmatismo...

Extracto de la página
http://ocularis.es/blog/?p=29

Recuerda lo más importante

Expresión en coeficientes

$-4x^3 - x^2 + 3$

-4	-1	0	3

Regla de Ruffini. Teorema del resto
El resto de la división por
x-a es el valor numérico del dividendo en a

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3 & -5 & 0 & 1 & 1\ \ -2 \\
-3 & 6 & & & 3\ \ 1\ \ 2 \\
\hline
 & 1 & 0 & & \text{cociente} \\
 & -1 & 2 & & \\
\hline
 & & 2 & 1 & \\
 & & -2 & 4 & \\
\hline
 & & & 5 & \text{resto}
\end{array}
$$

T. del resto

$5=3\cdot 2^3-5\cdot 2^2+1$

Regla de Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -5 & 0 & 1 \\
2 & & 6 & 2 & 4 \\
\hline
 & 3 & 1 & 2 & 5 \ \text{resto}
\end{array}
$$

cociente

División de Polinomios

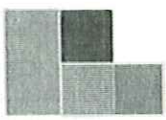
$$
\begin{array}{l|l}
12x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 9x + 6 & 4x^2 + 2x + 3 \\
\hline
-12x^4 - 6x^3 - 9x^2 & 3x^2 + x + 1 \\
\quad 4x^3 + 6x^2 + 9x + 6 & \text{cociente} \\
\quad -4x^3 - 2x^2 - 3x & \\
\qquad 4x^2 + 6x + 6 & \\
\qquad -4x^2 - 2x - 3 & \\
\qquad\quad 4x + 3 & \\
\qquad\quad \text{resto} &
\end{array}
$$

Raíces de un polinomio

Raíz 2	Raíz -2
P(2)=0	P(-2)=0
Divisor x-2	Divisor x+2

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$



$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Descomposición factorial

Los polinomios con coeficientes en IR **primos** son los de **grado uno** y los de **grado dos**, ax^2+bx+c, **con $b^2-4ac<0$**

Raíz de un polinomio
Raíz a
Divisor x-a
P(a)=0

Las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente.

Para hallar la descomposición factorial de un polinomio se tendrán en cuenta las siguientes herramientas:

- Regla de Ruffini
- Ecuación de 2º grado
- Identidades notables

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

Probando la regla de Ruffini (con divisores de 18), encontramos que -1 y 2 son raíces de este polinomio

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 5 & 1 & -21 & -18 \\
-1) & & -1 & -4 & 3 & 18 \\
\hline
 & 1 & 4 & -3 & 18 & 0 \\
2) & & 2 & 12 & -18 & \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & 0 &
\end{array}
$$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

$P(x)=x^4+5x^3+x^2-21x-18$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+6x+9)$

El polinomio de segundo grado x^2+6x+9 se puede descomponer resolviendo la ecuación $x^2+6x+9=0$ que da una solución doble, -3, o se puede reconocer la identidad notable $x^2+6x+9=(x+3)^2$

$P(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)^2$

Autoevaluación

1. Halla los coeficientes de $P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$ siendo $P(x)=3x+2$, $Q(x)=2x^2-5$ y $R(x)=x^2+8x$.

2. Escribe los coeficientes del cociente y del resto en la división de $2x^3-5x^2+5$ entre x^2+5.

3. Calcula el valor numérico de $-3x^3-5x^2+3$ en $x=-1$

4. ¿Es cierta la igualdad $2x^2+20x+25=(2x+5)^2$?

5. Calcula m para que el resto de la división de $4x^2+mx+1$ entre $x+5$ sea 2.

6. Si $P(x)=ax^2+bx+5$ y $a\cdot 6^2+b\cdot 6=3$, ¿cuál es el resto de la división de $P(x)$ entre $x-6$?

7. Halla una raíz entera del polinomio $x^3+5x^2+8x+16$

8. Halla la descomposición factorial de $-4x^2+12x+112$.

9. El polinomio $5x^3+9x^2-26x-24$ tiene por raíces 2 y -3 ¿Cuál es la otra raíz?

10. Las raíces de un polinomio de grado 3 son -6, 0 y 4. Calcula el valor numérico del polinomio en 2 sabiendo que su coeficiente de mayor grado es 3.