2. **Conmutativa**: El orden de los factores no altera el producto, Ejemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{13}=\frac{6}{13}\cdot\frac{4}{7}$$

3. **Asociativa**:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{7}=\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{7}\right)$$

4. **Elemento neutro**: El número racional 1, que se puede representar por cualquier fracción en la que el numerador y el denominador sean iguales.

$$\frac{a}{a}\cdot\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{a}=\frac{b}{c}$$

Ejemplos:

$\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=1$ es el elemento neutro para la multiplicación.

Ejemplo:

$$1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5};\ \frac{3}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$$

5. **Inverso**: El inverso de un número racional, es otro número racional que multiplicado por el primero da de resultado 1.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

Ejemplo:

$\frac{5}{4}$ es el inverso de $\frac{4}{5}$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}=1$$

El inverso también se llama recíproco.

Para hallar el inverso de un número, dividimos 1 por dicho número. El inverso de x será $\frac{1}{x}$. Cuando el número es fraccionario, el inverso se halla cambiando el numerador por el denominador y viceversa: el inverso de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

Ejemplos:

Hallar los inversos de $\frac{8}{3}$; $\frac{4}{6}$; $-\frac{6}{2}$; -3;

6) El producto de un número racional por 0 es igual a 0. Ejemplo:

$$\frac{3}{5}\cdot 0=\frac{3}{5}\cdot\frac{0}{1}=\frac{3\cdot 0}{5}=\frac{0}{5}=0$$

9.4. División

Al dividir dos números racionales siempre resulta otro número racional. Para dividir dos números racionales multiplicamos el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplos:

1) $\frac{3}{5}:\frac{4}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{21}{20}$

2) $\frac{6}{4}:\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{6}{4}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{48}{12}=-4$

3) $-\frac{5}{12}:\frac{6}{7}=-\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{6}=-\frac{35}{72}$

La división por 0 nunca es posible.

Distributiva: Del producto y de la división respecto de la suma y de la resta:

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{6}{9}+\frac{2}{3}-\frac{8}{7}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{9}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)$$

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{8}{12}-\frac{4}{9}\right):\frac{7}{2}=\frac{3}{7}:\frac{7}{2}+\frac{8}{12}:\frac{7}{2}+\left(-\frac{4}{9}\right):\frac{7}{2}$$

10. Identificación de números racionales. Números decimales. Clasificación

Número racional es todo aquel que se puede expresar como fracción o cociente indicado de dos números. Esta es la regla que nos permite identificar los números racionales.

Así todo número entero es racional porque se puede expresar como fracción.

Ejemplos:

$$+3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2};$$

$$-5=-\frac{5}{1}=-\frac{10}{2}$$

10.1. Número decimal

Cuando dividimos la unidad 1 en diez partes iguales obtenemos 10 décimas. Al dividir $\frac{1}{10}$ decimos que es igual a 0,1 o una décima; $\frac{1}{100}$ o una centésima...

Un número decimal es el que se representa por un número entero seguido de una coma y varias cifras decimales.

Ejemplos: 12,384 = doce con 384 milésimas.

–4,28 = menos cuatro con 28 centésimas.

10.2. Clasificación

10.2.1. Decimales finitos

Son los que tienen un número finito de cifras decimales; ejemplo: 6,54.

Podemos expresarlos como fracción colocando en el numerador el número sin la coma, y en el denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales haya.

$$6{,}43=\frac{643}{100};\ 8{,}163=\frac{8163}{1000}$$

10.2.2. Decimales infinitos

Son los que tienen un número infinito de decimales. Pueden ser de dos tipos: Periódicos y no periódicos.

Periódicos: Un número decimal periódico es aquel que, teniendo infinitas cifras decimales, hay una cifra o grupo de cifras que se va repitiendo indefinidamente 4,6666...; 72,383838...

Se expresan colocando un arco sobre la cifra o grupo de cifras que se repiten, así:

$4{,}666... = 4{,}\overset{\frown}{6};\ 72{,}3838... = 72{,}\overset{\frown}{38}$

La cifra o grupo de cifras que se repiten se llama periodo.

Fracción generatriz: La fracción obtenida de un decimal periódico se llama fracción generatriz de dicho decimal.

No periódicos: Son números decimales infinitos cuyas cifras no siguen una periodicidad, sino que progresan arbitrariamente. Por ejemplo las raíces cuadradas no exactas de los números enteros positivos:

$\sqrt{2} = 1{,}4142...$

11. Operaciones con números decimales

11.1. Suma y resta

Para sumar o (restar) decimales, se colocan los sumandos (o ambos términos de la resta) de manera que las comas coincidan; se suman o (restan) normalmente como si fueran números naturales y se coloca la coma en el resultado en la misma posición que tiene en cada uno de los números. Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 3{,}708 \\ +\ 41{,}237 \\ 126{,}1421 \\ \hline 171{,}0871 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40{,}238 \\ -\ 3{,}63 \\ \hline 36{,}608 \end{array}$$

11.2. Multiplicación

Para multiplicar dos números decimales, se multiplican sin tener en cuenta las comas y finalmente se coloca una coma al resultado, de manera que haya tantas cifras decimales como suma del número de ellas que tienen ambos factores. Ejemplo:

$$\begin{array}{rl} 64{,}23 & \text{dos cifras decimales} \\ \times\ 2{,}18 & \text{dos cifras decimales} \\ \hline 51384 & \\ 6423 & \\ 12846 & \\ \hline 140{,}0214 & \text{cuatro cifras decimales} \end{array}$$

11.3. División

Para verlo mejor podemos establecer tres casos:

1. Ambos términos tienen el mismo número de cifras decimales. Se eliminan las comas y se divide normalmente.

   Ejemplos: 2,347:0,213 =; 4,170:21,32 =

$$\begin{array}{l|l} 2347 & 213 \\ \cline{2-2} 0217 & 11 \\ \ \ 004 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 417 & 2132 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Ahora se plantearía el problema de cómo seguir ambas divisiones, en la 1ª se coloca una coma al cociente y se van añadiendo ceros al dividendo hasta que resulte una división exacta, o bien hasta conseguir un determinado número de cifras decimales. En la 2ª colocamos un cero 0, después una coma y se van añadiendo ceros al dividendo hasta obtener un resultado como en el caso anterior.

$$\begin{array}{l|l} 2347 & 213 \\ \hline 217 & 11{,}018 \\ \ \ 400 & \\ \ \ \ 1870 & \\ \ \ \ \ 166 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 4170 & 2132 \\ \hline 20380 & 0{,}1955 \\ \ 11920 & \\ \ \ 12600 & \\ \ \ \ 1940 & \end{array}$$

2. El dividendo supera en cifras decimales al divisor:

$$\begin{array}{l|l} 4{,}508 & 5{,}3 \\ \hline \end{array}$$

Quitamos las comas y añadimos al divisor tantos ceros como cifras decimales más que él, tenía el dividendo.

Procedemos finalmente como en el caso anterior.

$$\begin{array}{l|l} 45080 & 5300 \\ \hline 26800 & 0{,}85 \\ \ 0300 & \end{array}$$

3. El dividendo tiene menos cifras decimales que el divisor: 345,3:4,72. Quitamos las comas y añadimos al dividendo tantos ceros como cifras decimales más que él, tenía el divisor.

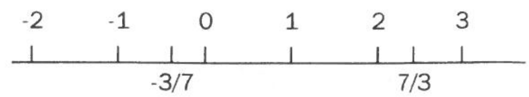
$$\begin{array}{l|l} 34530 & 472 \\ \hline \end{array}$$

Dividimos normalmente.

12. Representación gráfica. Ordenación en Q

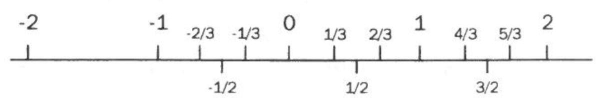
Los números racionales se pueden representar gráficamente en una recta; partimos de 0 y representamos a la derecha los enteros positivos, a la izquierda los enteros negativos. En las subdivisiones de cada intervalo representamos los números fraccionarios. Para representarlos dividimos un intervalo unidad en tantas partes como indica el denominador y tomamos un número de estas partes igual al que indica el numerador.

Por ejemplo representemos $\frac{7}{3}$ y $-\frac{3}{7}$



En la 1ª dividimos cada unidad en 3 partes y tomamos 7 de estas partes.

En la 2ª dividimos las unidades en 7 partes (como es negativo se toma a la izquierda) y se toman 3 de ellas. Esta recta, en la cual representamos los números racionales, se llama recta racional.

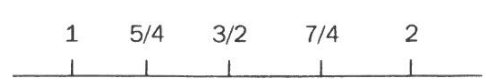


12.1. Propiedad de densidad

En los números racionales se nos plantea un problema, veámoslo con un ejemplo: ¿Cuántos números racionales hay entre 1 y 2?, o bien ¿cuántas subdivisiones se pueden hacer en el intervalo (1,2)?

Siempre podemos obtener el punto medio del intervalo sumando los extremos y dividiendo por dos:

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$



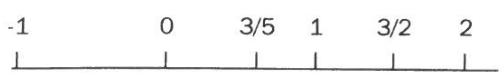
Con los intervalos que quedan volvemos a hacer lo mismo:

$$\frac{1+\frac{3}{2}}{2}=\frac{5}{4};\quad \frac{2+\frac{3}{2}}{2}=\frac{7}{4}$$

Y así sucesivamente. Esta operación no termina nunca, se podría repetir hasta el infinito. Concluimos: «Entre cada dos números racionales cualesquiera, existen infinitos números racionales».

12.2. Ordenación en Q

Como vemos en la recta racional se puede representar cualquier número racional; los puntos de la recta representan números racionales. Existe una ordenación: de izquierda a derecha se representan de menor a mayor. Así podemos decir $\frac{3}{5}$ es menor que $\frac{3}{2}$ y éste es menor que 2, etc.



Pero, ¿podemos decir qué número racional es el siguiente inmediato de 2?, ¿y el anterior inmediato a 1? La respuesta es **No**. Es imposible ordenar todos los números racionales, porque entre cada dos de ellos, por próximos que estén, siempre hay infinitos números racionales.

Sí podemos ordenar un conjunto finito de números racionales.

Ejemplo: Ordenar de mayor a menor los números:

$$\left\{2,\ \frac{7}{5},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{7},\ \frac{8}{9},\ 3,\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5}\right\}$$

$$3,\ 2,\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{9},\ \frac{4}{7},\ \frac{2}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{1}{3}$$

$$3>2>\frac{7}{5}>\frac{8}{9}>\frac{4}{7}>\frac{2}{5}>-\frac{1}{3}>-\frac{2}{5}$$

Esto es posible porque, si tenemos dos números racionales, podemos determinar cuál es el mayor de ellos.

Sean $\frac{6}{11}$ y $\frac{7}{13}$, ¿cuál es mayor?; reducimos a común denominador, esto es, obtenemos fracciones equivalentes a las dadas pero con un denominador común:

$$\frac{6\cdot 13}{11\cdot 13} \text{ y } \frac{7\cdot 11}{11\cdot 13};\quad \frac{78}{143} \text{ y } \frac{77}{143}$$

Ahora se ve claramente cuál es mayor: $\frac{78}{143}=\frac{6}{11}$ luego: $\frac{6}{11}>\frac{7}{13}$

13. Ampliación del concepto de número racional. El número real

13.1. Números irracionales

Hasta ahora hemos visto que toda fracción se puede expresar como número decimal; sin embargo el recíproco no es cierto: no todo número decimal se puede expresar como fracción. Los números decimales que conocemos son los finitos o exactos y los infinitos o periódicos. Existe otro tipo de números decimales que no son exactos ni periódicos, son los números **irracionales,** que pueden definirse como los números decimales infinitos no periódicos.

$\pi = 3,141592...$

$e = 2,71828...$

$\sqrt{2} = 1.414213...$

$\sqrt[3]{2} = 1,25992...$

Con los **números irracionales (I)** se resuelve el problema de la radicación.

Ejemplo:

Hallar la raíz cuadrada de un número significa encontrar el mayor número decimal (expresado en décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, etc.) cuyo cuadrado no sea mayor que el radicando.

Vamos a hallar la $\sqrt{2}$ aplicando la regla anterior mediante tanteo.

a) Calculamos, en primer lugar, la parte entera: $1^2 = 1$; $2^2 = 4$, por tanto, el 1 es la parte entera ya que el cuadrado de 2 supera a 2.

b) Vemos la aproximación de décimas

$(1,1)^2 = 1,21$; $(1,2)^2 = 1,44$; $(1,3)^2 = 1,69$; $(1,4)^2 = 1,96$; $(1,5)^2 = 2,25$.

Por tanto la cifra de las decenas ha de ser 4.

c) Aproximación hasta las centésimas

$(1,41)^2 = 1,9881$; $(1,42)^2 = 2,0164$.

Por tanto la cifra de las centésimas ha de ser 1.

d) Aproximación hasta las milésimas

$(1,411)^2 = 1,9909...$; ....; $(1,414) = 1,9993...$

$(1,415) = 2,0022...$.

Por tanto la cifra de las milésimas ha de ser 4.

e) Si siguiéramos tanteando comprobaríamos que podemos aproximarnos a $\sqrt{2}$ todo lo que queramos.

La expresión decimal de $\sqrt{2}$ aproximada hasta la diezmillonésima es:

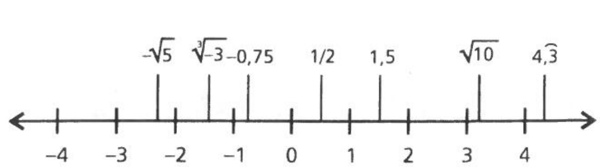
$\sqrt{2} = 1,4142136$

13.2. El número real

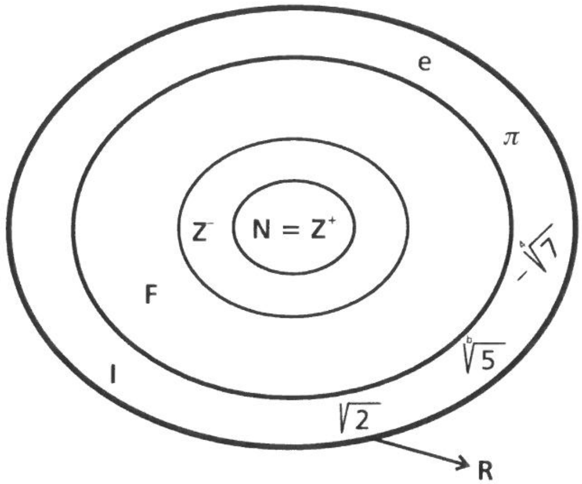
El conjunto de los **números reales (R)** está formado por la unión de los números racionales y los números irracionales.

$$\mathbf{R} = \{\mathbf{Q} \cup \mathbf{I}\}$$

Los números reales se representan como puntos en una recta llamada **recta real.**



Todo número real se representa como un único punto de la recta real y recíprocamente todo punto de la recta real representa un único número real.



14. Potencia de base entera y exponente natural

Si **a** es un número entero y **n** un número natural distinto de 0 y 1 se llama potencia de base **a** y exponente **n** al producto de **n** factores iguales todos al número a.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \ldots \overset{n}{a}$$

Ejemplo:

$$(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = +16$$
$$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$$

14.1. Signo de una potencia

Si la base es positiva → siempre positiva

Si la base es negativa:
- exponente par → positiva
- exponente impar → negativa

15. Operaciones con potencias

15.1. Producto de potencias de la misma base

Para multiplicar potencias de la misma base se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo:

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^5$$

15.2. División de potencias de la misma base

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \textbf{Ejemplo: } \frac{7^5}{7^2} = 7^3$$

15.3. Potencia de potencia

Para elevar una potencia a otra potencia se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejemplo: $\left[(-2)^3\right]^4 = (-2)^{12} = 2^{12}$

15.4. Potencia de un producto

Para elevar un producto a una potencia se elevan cada uno de los factores a dicha potencia.

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

Ejemplo:

$$[(-3) \cdot 2 \cdot (-5)]^3 = (-3)^3 \cdot 2^3 \cdot (-5)^3$$

16. Potencias con exponente cero

Es igual a la unidad:

$$a^n : a^n \left\{ \begin{array}{l} a^{n-n} = a^0 \\ \dfrac{a^n}{a^n} = 1 \end{array} \right\} a^0 = 1$$

17. Potencias con exponente negativo

Es igual a la unidad dividida por la misma potencia de exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}\ ;\ \frac{1}{2^{-3}} = 2^3$$

18. Números irracionales. Radicales

18.1 Definición de radical

Llamamos raíz n-ésima de un número real **a**, a otro número **b** (si existe) que elevado a la potencia **n** nos da **a**.

$$\sqrt[n]{a} = b \qquad \begin{array}{l} n \ldots \text{índice} \\ \sqrt{\ } \ldots \text{signo radical} \\ a \ldots \text{radicando} \end{array}$$

19. Relación entre potencias y radicales

a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \qquad \left(\sqrt[4]{5}\right)^4 = 5$

b) $a^{\left(\frac{n}{p}\right)} = \sqrt[p]{a^n}; \qquad 9^{\left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt[4]{9^3}$

20. Raíz cuadrada

Un número natural **b** es la raíz cuadrada de otro número natural **a** si el número **b** elevado al cuadrado da el número **a**.

Las potencias de exponente 2 se llaman cuadrados o también cuadrados perfectos.

21. Propiedad fundamental de los radicales

El valor de un radical no varía si se multiplican o se dividen por un mismo número el exponente y el índice del mismo.

$$\sqrt[p\cdot q]{x^{n\cdot q}} = \sqrt[p]{x^n}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{5b} = \sqrt[4]{(5b)^2} = \sqrt[4]{25b^2}$$
$$\sqrt[3]{3b(x+y)} = \sqrt[6]{3^2\, b^2\, (x+y)^2}$$
$$\sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5}$$

21.1. Transformación de radicales

Un radical puede transformarse, de infinitas formas, en otro, multiplicando o dividiendo el exponente y el índice del radicando por un mismo número.

Ejemplo:

$$\sqrt{2x} = \sqrt[4]{4x^2} = \sqrt[8]{16x^4} = \sqrt[24]{4096x^{12}}$$

22. Reducción de radicales a índice común

1º Se halla el m.c.m de los índices, que es el índice común.

2º Se divide el índice común por cada índice y los cocientes resultantes, se multiplican respectivamente por cada exponente de los radicandos.

Ejemplo: Reducir a índice común:

$$\sqrt{2a^2x},\ \sqrt[6]{3(x+y)},\ \sqrt[4]{7a^2z}$$

m.c.m. (2,4,6) = 12

$$\sqrt[12]{2^6\, a^{12}\, x^6},\ \sqrt[12]{3^2\,(x+y)^2},\ \sqrt[12]{7^3\, a^6\, z^3}$$

23. Raíces de un producto y de un cociente

23.1. Raíz de un producto

La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.

$$\sqrt[n]{x\cdot y\cdot z\cdot h} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}\cdot\sqrt[n]{z}\cdot\sqrt[n]{h}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{125\cdot 343\cdot 1331} = \sqrt[3]{125}\cdot$
$\cdot\ \sqrt[3]{343}\cdot\sqrt[3]{1331} = 5\cdot 7\cdot 11 = 385$

23.2. Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$