

Ejemplo:

$$\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

24. Potencia de una raíz y raíz de una potencia

24.1. Potencia de una raíz

Para elevar una raíz a una potencia, se eleva el radicando a esa potencia.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo:

$$(\sqrt{5})^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$$

24.2. Raíz de una potencia

Para hallar la raíz de una potencia se obtiene la raíz de la base y se eleva el resultado a la potencia dada.

Ejemplo:

$$\sqrt{25^3} = (\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$$

25. Raíz de una raíz

La raíz m-ésima de la raíz n-ésima de un número es igual a la raíz mn-ésima de dicho número.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

26. Extracción de raíces de índice compuesto

Ejemplos:

$$\sqrt[4]{2401} = \sqrt{\sqrt{2401}} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

27. Extracción de factores de un radical

Es necesario que el índice sea igual o menor que el exponente del factor. Se divide el exponente entre el índice y el cociente sale como exponente de dicho factor fuera de la raíz y el resto queda como exponente dentro de la raíz. Si los factores son números hay que descomponerlos previamente en factores primos.

Ejemplos:

$$\sqrt{31104} = \sqrt{2^7 \cdot 3^5} = 2^3 \cdot 3^3 \sqrt{2 \cdot 3} = 72\sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{49x^9(a+b)^3} = x^3(a+b)\sqrt[3]{7^2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{xy^5z^6}{z^4h^6}} = \frac{y \cdot z}{h} \sqrt[5]{\frac{x \cdot z}{z^4 \cdot h}}$$

28. Introducción de factores en un radical

Para introducir factores dentro de una raíz hay que elevar dichos factores al índice de la raíz.

Ejemplos:

$$2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 a \sqrt[3]{2ac} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 2x^6 \cdot a^3 \cdot ac} = \\ &= \sqrt[3]{54 \cdot x^6 \cdot a^4 \cdot c} \end{aligned}$$

29. Radicales semejantes

Son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando. Pueden diferir únicamente en el coeficiente.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) & 3a\sqrt{x^2}, \quad 2b\sqrt{x^2}, \quad 4a^2\sqrt{x^2} \\ 2) & \sqrt{x-1}, \quad \sqrt{9a^2(x-1)}, \quad \sqrt{49x^4(x-1)}, \\ & \sqrt{x-1}, \quad 3a\sqrt{x-1}, \quad 7x^2\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

30. Operaciones con radicales

30.1. Suma y resta de radicales

Para poder sumar o restar radicales es necesario que sean semejantes. Para proceder a la suma se saca el radical como factor

común de la suma algebraica de los coeficientes.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) & 2\sqrt[4]{x^3} + 4\sqrt[4]{x^3} + 5\sqrt[4]{x^3} = \\ &= (2+4+5)\sqrt[4]{x^3} = 11\sqrt[4]{x^3} \\ 2) & 7\sqrt{2a} - 5\sqrt{2a} + 6\sqrt{2a} = \\ &= (7-5+6)\sqrt{2a} = 8\sqrt{2a} \\ 3) & 4\sqrt[3]{81a^3x} + 2\sqrt[3]{192x} + \sqrt[3]{9x^2} = \\ &= 4 \cdot 3a\sqrt[3]{3x} + 2 \cdot 4\sqrt[3]{3x} + \sqrt[3]{3x} = \\ &= 12a\sqrt[3]{3x} + 8\sqrt[3]{3x} = (12a+8+1) + \\ &+ \sqrt[3]{3x} = (12a+9)\sqrt[3]{3x} \end{aligned}$$

30.2. Multiplicación y división de radicales

Para multiplicar o dividir varios radicales cuando tienen el mismo índice, se multiplican o dividen los radicandos y se le coloca al resultado de la raíz el mismo índice.

Si los radicales no tienen el mismo índice, se reducen previamente al índice común.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) & \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 6} = \sqrt{36} = 6 \\ 2) & \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[15]{7} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 4^3 \cdot 7} = \\ &= \sqrt[15]{2^5 \cdot 4^3 \cdot 7} = \sqrt[15]{2^{11} \cdot 7} \\ 3) & \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{12\sqrt[12]{2^4}}{12\sqrt[12]{3^3}} = \sqrt[12]{\frac{2^4}{3^3}} \end{aligned}$$

31. Racionalización de denominadores

Esta operación consiste en eliminar raíces de un denominador, convirtiéndolo en un número entero. Hay varios casos:

- a) El denominador es un monomio, en el que aparece una raíz cuadrada. Se multiplican el numerador y el denominador por la raíz que aparece en el denominador. Es conveniente simplificar antes los radicales, cuando haya lugar. Ejemplos:

$$1) \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$2) \frac{5}{2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{7^2}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

- b) El denominador es una raíz de índice cualquiera m o bien el radicando es una potencia. Se resuelve, en general, así:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt[m]{b^n}} &= \frac{a \sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n} \cdot \sqrt[m]{b^{m-n}}} = \frac{a \sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^n \cdot b^{m-n}}} = \\ &= \frac{a \sqrt[m]{b^{m-n}}}{\sqrt[m]{b^m}} = \frac{a \sqrt[m]{b^{m-n}}}{b} \end{aligned}$$

Ejemplos:

$$1) \frac{5}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5 \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6} \sqrt[3]{6^2}} = \frac{5 \sqrt[3]{6^2}}{\sqrt[3]{6^3}} = \frac{5 \sqrt[3]{6^2}}{6}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{7}{\sqrt[5]{5^2}} &= \frac{7 \sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[5]{5^3}} = \frac{7 \sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^5}} = \\ &= \frac{7 \sqrt[5]{5^3}}{5} \end{aligned}$$

- c) El denominador es un binomio. Se multiplican numerador y denominador por el conjugado del denominador, el cual se obtiene cambiando de signo el segundo de los tér-

minos. Así, el conjugado de $a + b$ es $a - b$, y el de $a - b$ es $a + b$.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \frac{a}{\sqrt{b}-2} &= \frac{a(\sqrt{b}+2)}{(\sqrt{b}-2)(\sqrt{b}+2)} = \\ &= \frac{a(\sqrt{b}+2)}{\sqrt{b^2}-2^2} = \frac{a(\sqrt{b}+2)}{b-4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{3}{2+\sqrt{5}} &= \frac{3(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \\ &= \frac{3(2-\sqrt{5})}{4-\sqrt{5^2}} = \frac{3(2-\sqrt{5})}{4-5} = \\ &= \frac{3(2-\sqrt{5})}{-1} = -3(2-\sqrt{5}) \end{aligned}$$

32. Valor absoluto y sus propiedades

El valor absoluto de un número real x , se representa por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|3| = 3; |-4| = -(-4); |0| = 0$$

32.1 Propiedades

1. Un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto.

$$|x| = |-x|$$

2. El valor absoluto del producto de dos números reales es igual al producto de sus valores absolutos:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

3. El valor absoluto del cociente de dos números reales (con denominador $\neq 0$) es igual al cociente de los valores absolutos:

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

4. El valor absoluto de la suma de dos números reales es menor o igual que la suma de los valores absolutos:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Ejemplos:

$$|5 + 7| = |5| + |7|$$

$$|5 + (-7)| < |5| + |-7|$$

5. El valor absoluto de la diferencia de dos números reales es mayor o igual que la diferencia de sus valores absolutos:

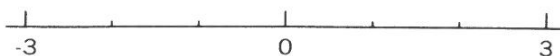
$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

Ejemplos:

$$|5 - 3| = |5| - |3|$$

$$|5 - (-3)| > |5| - |3|$$

El valor absoluto de un número expresa su distancia al cero:



$$|3| = |-3| = 3$$

El valor absoluto de los números expresa la distancia entre ellos:

$$d(a,b) = |a - b| = |b - a|$$

Ejemplos:

$$d(7,4) = |7 - 4| = |3| = 3$$

$$d(3,5) = |3 - 5| = |-2| = 2$$

$$d(-5,2) = |-5 - 2| = |-7| = 7$$

33. Intervalos y semirrectas

33.1 Intervalos de extremo a y b

Un intervalo es un segmento (un conjunto de puntos) de la recta real que tiene por extremos dichos puntos. Los intervalos pueden ser de cuatro tipos dependiendo de que se incluyan o no sus extremos:

1. **Intervalo cerrado:** Cuando contiene sus extremos. Se representa por $[a,b]$



$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

2. **Intervalo abierto:** Cuando no contiene sus extremos. Se representa por (a,b)



$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$

3. **Intervalo semiabierto por la izquierda:** Cuando no contiene el extremo de la izquierda. Se representa por $(a,b]$



$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

4. **Intervalo semiabierto por la derecha:**
 Cuando no contiene el extremo de la derecha. Se representa por $[a,b)$



$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$

La longitud de un intervalo es la diferencia entre sus extremos

Ejemplos:

$$[2,7] \Rightarrow \text{longitud } [2,5] = 5$$

$$(3,9) \Rightarrow \text{longitud } (3,9) = 6$$

33.2 Semirrectas

Una semirrecta es un intervalo que tiene un solo extremo y se extiende indefinidamente a lo largo de la recta real, en sentido contrario.

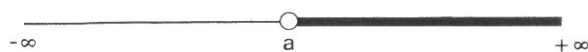
Las semirrectas pueden ser de cuatro tipos:

1. **Semirrecta derecha y cerrada:**



$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$$

2. **Semirrecta derecha y abierta:**



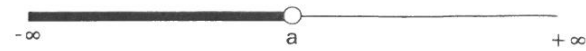
$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$$

3. **Semirrecta izquierda y cerrada:**



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$$

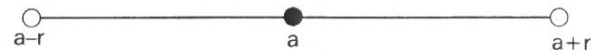
4. **Semirrecta izquierda y abierta:**



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

33.3 Entornos

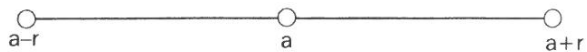
Una forma específica de expresar los intervalos es dar su centro a y su radio r (la mitad de su longitud). Se suelen simbolizar por $(a - r, a + r) = \{x \in \mathbb{R} / a - r < x < a + r\}$



Se llaman *entornos* a los intervalos abiertos de cada uno de los puntos que contienen. Pueden expresarse utilizando el valor absoluto: $\{x \in \mathbb{R} / a - r < x < a + r\} = |x - a| < r$.

Si $a = 0$, el intervalo tiene como centro el origen: $\{x \in \mathbb{R} / -r < x < r\} = |x| < r$

Se llama *entorno reducido* de centro a y radio r a los entornos que no contienen el centro a : $\{x \in \mathbb{R} / a - r < x < a + r, x \neq a\}$

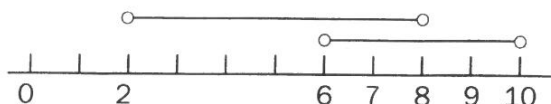


33.4 Operaciones con intervalos

Las operaciones más importantes que se pueden realizar con intervalos son la unión y la intersección.

La *unión* de dos intervalos (a,b) y (c,d) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno o a otro intervalo

$$(a,b) \cup (c,d)$$



Ejemplo:

$$(2, 8) \cup (6, 10) = (2, 10)$$

La unión de intervalos no es siempre un intervalo:

Ejemplo:

$$(-3, 5) \cup (7, 10)$$

La intersección de dos intervalos (a,b) y (c,d) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a uno y otro intervalo: $(a,b) \cap (c,d)$

Ejemplo:

$$(2, 8) \cap (6, 10) = (6, 8)$$

La intersección de intervalos siempre es un intervalo. Cuando los intervalos no tienen elementos comunes su intersección es el conjunto vacío (\emptyset) .

Ejemplo:

$$(-3, 5) \cap (7, 10) = \emptyset$$

34. Logaritmos

Ya vimos anteriormente, cuando estudiamos las potencias, cómo proceder para elevar un número a otro. Los logaritmos resuelven el problema contrario: dados dos números, ¿qué potencia del primero es igual al segundo?

Ejemplo:

¿A qué número hay elevar 10 para obtener 10000?

Como $10^4 = 10000$, el resultado es 4.

4 es el logaritmo de 10000 en base 10 y lo simbolizamos: $\log_{10} 10000 = 4$

Llamamos *logaritmo en base a de x*, al número y al que hay que elevar a para obtener x.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x, a > 0, a \neq 1; x > 0$$

"El logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener el número".

Los logaritmos en *base diez* se llaman *decimales* y se simbolizan por log sin escribir la base.

Ejemplos:

$$\log 1000 = 3; \log 10 = 1$$

Los logaritmos que tiene **de base el número e** se llaman *logaritmos neperianos* y se simbolizan por ln o L.

Utilizando en la calculadora las teclas **log** y **ln**, se obtienen, respectivamente, los logaritmos decimales y neperianos.

Ejemplos:

1. Hallar utilizando la calculadora $\log 12$.

Se pulsa 12 y a continuación log:
 $\log 12 = 1,0791812$.

2. Hallar utilizando la calculadora $\ln 12$:

Se pulsa 12 y a continuación ln:
 $\ln 12 = 2,4849066$.

34.1. Propiedades de los logaritmos. Cambio de base

1. El logaritmo, en cualquier base, de uno es igual a 0.

$$\log_a 1 = 0$$

2. El logaritmo de la base es 1.

$$\log_a a = 1$$

3. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

4. El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

5. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

6. El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido entre el índice de la raíz.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x = \frac{\log_a x}{n}$$

Ejemplos:

1. $\log_3 1 = 0$; ya que $3^0 = 1$
2. $\log_5 5 = 1$; ya que $5^1 = 5$

3. Sabiendo que $\log 5 = 0,69897$, hallar $\log(10 \cdot 5)$.

$$\begin{aligned} \log(10 \cdot 5) &= \log 10 + \log 5 = \\ &= 1 + 0,69897 = 1,69897 \end{aligned}$$

4. Hallar $\log\left(\frac{10}{5}\right)$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{10}{5}\right) &= \log 10 - \log 5 = \\ &= 1 - 0,69897 = 0,30103 \end{aligned}$$

5. Hallar $\log 5^{10}$

$$\begin{aligned} \log 5^{10} &= 10 \log 5 = \\ &= 10 \cdot 0,69897 = 6,9897 \end{aligned}$$

6. Hallar $\log \sqrt{10}$.

$$\begin{aligned} \log \sqrt{10} &= \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{\log 10}{2} = \\ &= \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

■ Cambio de base

Para expresar la relación entre los logaritmos de un número en distintas bases se utiliza la fórmula del cambio de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

Calcular $\log_6 47$, utilizando la calculadora.

Normalmente, con la calculadora no se obtienen directamente los logaritmos en base distinta a 10 o e. Utilizaremos, por tanto, la fórmula del cambio de base:

$$\log_6 47 = \frac{\log 47}{\log 6} = 2,1488083$$

OPERACIONES COMBINADAS

NOMBRE: _____ FECHA: _____

El orden en que hay que hacer las operaciones es el siguiente:

- 1º Paréntesis.
- 2º Multiplicaciones y divisiones.
- 3º Sumas y restas.

1. Calcula las siguientes operaciones combinadas de números naturales:

- a) $5 + 3 - 2 \cdot 2 =$
- b) $3 + 5 \cdot (7 - 3) =$
- c) $4 + 2 \cdot [3 + 2 - (4 - 1)] =$
- d) $2 \cdot (15 - 2) - [11 - (7 - 3)] =$
- e) $(8 - 4) : 2 - 1 =$
- f) $2 - 3 \cdot (7 - 4) + 8 =$
- g) $4 \cdot 14 - 120 : 12 =$
- h) $3 \cdot 12 + 14 : 7 =$
- i) $15 : (11 - 8) + 35 : (25 - 18) =$
- j) $5 + 4 \cdot 5 =$
- k) $3 \cdot 15 - 45 =$
- l) $3 \cdot (12 + 14) =$
- m) $3 \cdot 12 + 14 =$
- n) $5 \cdot (12 - 9) + 3 \cdot (19 - 16) =$
- o) $45 : 5 - 45 : 9 =$
- p) $20 : (16 - 12) =$
- q) $5 \cdot (17 - 12) =$
- r) $2 + 45 : [3 \cdot (17 - 12)] =$
- s) $80 + (40 - 3) =$
- t) $17 - [29 - (4 + 13) + 2] =$
- u) $2 [18 + 3 (13 - 9) - 5] =$
- v) $10 - [6 - (5 - 4) - 2] + 1 =$
- w) $4^2 : 8 + [9 - 6] =$
- x) $9 : 3 + [(28 - 10) - (9 - 2)] =$
- y) $[4 \cdot 2 + 20] : 4 + 2 \cdot (9 : 3) =$
- z) $7 \cdot 4 : 14 - 3 [10 - 2 (8 - 3)] =$
- aa) $2 - [8 - (-3 + 6) - 5] =$
- bb) $10 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1 =$

2. Calcula el valor de las siguientes operaciones combinadas con potencias:

- a) $3^2 (15 + 5)^2 + 2^3 (15 - 5)^4 =$
- b) $5 (4 - 2)^2 + 1^2 (2^3 - 5)^2 =$
- c) $560 - 2^2 (34 - 24)^2 =$
- d) $532 + 2 (4^3 - 4^2)^2 =$
- e) $2 (3^2 - 3)^2 + 2^2 (5^2 - 5)^2 =$
- f) $(8 - 5)^3 + 2 (4^2 - 13) + 7 (6^2 - 30) =$
- g) $720 + 3^2 (20 - 15) =$
- h) $3^3 - 2^2 + 4 (7 - 2)^2 =$
- i) $(10 - 3)^2 + 2 [6 + 5 (3^2 - 2)^2] =$

j) $[(2-1)^3 + 2] [2^2 + (3^2)^2] =$

k) $4^2 : (-8) - [9 - (-6)] =$

OPERACIONES COMBINADAS DE NUMEROS ENTEROS

3. Calcula las siguientes operaciones combinadas con números enteros:

a) $-12 + (-64) + (-17) + 4 =$

b) $25 - 50 - 56 + 50 - 25 + 56 =$

c) $3 \cdot [-3 + (-3)] - 14 : (-7) =$

d) $2 \cdot [3 + (-2) \cdot 5] + (-2) \cdot (-5) \cdot (-3) =$

e) $-6 - 5 \cdot [5(-2) - 5] + (-5) \cdot 4 =$

f) $-9 : 3 - [(8 - 10) - (9 - 2)] =$

g) $[(-4) \cdot 2 + 20] : (-4) + 2 \quad (9 : (-3)) =$

h) $(-35) : (-5) - 3 \cdot (5 - 7) =$

i) $[(-4) : (+2)] - [(+7) - (-2)] =$

j) $[(+3) - (+5) + (+4)] : [(+15) : (-3) - (-7)] =$

k) $-13 \cdot (+3) - (-12) \cdot (+7) =$

l) $[(-25) + 5 - (-2)] : (-8) =$

m) $-8 \cdot [5 - (-2)] - 48 : [6 + (-14)] =$

n) $-11 \cdot [10 + (-7)] + 36 : [(-1) - (-10)] =$

o) $42 : [(-6) - (-3)] + 28 : [-6 - (-8)] =$

NUMEROS ENTEROS: Operaciones combinadas

1. Quita paréntesis:

- a) $+(-5)$ d) $-(-4)$ g) $-(+6)$
 b) $-(+8)$ e) $+(+12)$ h) $+(-7)$
 c) $-[-(-3)]$ f) $-[+(-15)]$ i) $-[-(+7)]$

2. Calcula:

- a) $12 - 8 + 4 - 9 - 3 + 10$
 b) $5 - 9 - 7 + 4 - 6 + 8$
 c) $-1 - 3 + 5 - 8 - 4 - 3 + 2$
 d) $-6 - 9 + 4 + 12 - 15 + 21$
 e) $(-5) - (-5) - (+5)$
 f) $(-12) + (+6) - (-7)$
 g) $(+6) + (-2) - (+5) - (-7)$
 h) $(+18) - (-11) - (+10) + (-14)$
 i) $(-8) - (-1) - (+3) + (-5) + (+9)$
 j) $(+2) - (+12) + (-11) - (-15) - (-5)$

3. Realiza las siguientes operaciones:

- a) $10 - (8 + 4)$
 b) $6 - (3 - 12)$
 c) $(5 + 7) - (2 - 8)$
 d) $18 + (3 - 5 + 2 - 8)$
 e) $15 - (8 - 2 - 6 + 1)$
 f) $(5 - 3 + 2) - (10 - 5 - 3 + 1)$
 g) $(4 - 6) - [(-2) + (-7)]$
 h) $(-9) + [(-4) - (-2) + (-3)]$
 i) $(+12) - [(+2) + (-7) - (+14)]$
 j) $[(-12) - (-20)] - [(+6) + (5 - 9) - (16 - 8 - 11)]$

4. Calcula:

- a) $20 + 5 \cdot (6 - 9)$
 b) $18 - 3 \cdot (4 + 2)$
 c) $4 \cdot (2 - 6) - 5 \cdot (3 - 7)$
 d) $150 : (7 - 12)$
 e) $(35 - 15) : (5 - 8)$
 f) $(6 - 2 - 10) : (5 - 11)$
 g) $(-2) \cdot (+7) + (+5) \cdot (+6)$
 h) $(+4) \cdot (-20) - (+2) \cdot (-40)$
 i) $(+5) \cdot (+10) - (+4) \cdot (-20)$
 j) $(+5) \cdot [(-3) + (+7)]$

5. Calcula:

- a) $(-2) \cdot [8 - (+4) - (-10)]$
 b) $[(-6) - (-3)] \cdot [(+5) - (-2)]$
 c) $(-5) \cdot [(-5) + (+2) - (4 + 6 - 1)]$
 d) $(-3) \cdot (+2) - [(-5) + (-7) - (-1)] \cdot (-3)$
 e) $3 \cdot [(+4) + (-6)] - (-2) \cdot [8 - (+4)]$
 f) $6 + (3 - 5 + 4) \cdot 2 - 3 \cdot (6 - 9 + 8)$
 g) $6 \cdot 4 - 5 \cdot 6 - 2 \cdot 3$
 h) $15 - 6 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3$
 i) $(+4) \cdot (1 - 9 + 2) : (-3)$
 j) $(-12 - 10) : (-2 - 6 - 3)$

6. Opera estas expresiones:

- a) $3 - [(5 - 8) - (3 - 6)]$
 b) $1 - (3 - [4 - (1 - 3)])$
 c) $(2 + 7) - (5 - [6 - (10 - 4)])$
 d) $13 - [8 - (6 - 3) - 4 \cdot 3] : (-7)$
 e) $5 \cdot (8 - 3) - 4 \cdot (2 - 7) - 5 \cdot (1 - 6)$
 f) $12 \cdot (12 - 14) - 8 \cdot (16 - 11) - 4 \cdot (5 - 17)$
 g) $18 - 40 : (5 + 4 - 1) - 36 : 12$
 h) $4 + 36 : 9 - 50 : [12 + (17 - 4)]$
 i) $48 : [5 \cdot 3 - 2 \cdot (6 - 10) - 17]$
 j) $3 \cdot 4 - 15 : [12 + 4 \cdot (2 - 7) + 5]$

7. Efectúa:

- a) $2^2 - 4^2 : 8 + 3$
 b) $6^2 : 4 - 1^3 - 4^2 : 2 - 3^2$
 c) $2 \cdot 3^3 - 4^2 : 2 + 3^2 - 1^4$
 d) $3 \cdot 41 - 4^2 - 5 + 1 - 2^3$
 e) $20 + [3 \cdot 4 - (17 - 3 \cdot 2^2)] \cdot 2$
 f) $10 + 8 \cdot 3^2 - 5 \cdot (27 - 2^3 \cdot 3)$
 g) $18 - [2 \cdot (8 - (29 - 3 \cdot 2^3)) - 4]$

8. Calcula:

- a) $(-3)^2 - (-2)^2 + (-4)^3 : 2^2$ d) $5^2 + (-3^2)^2 + 2 \cdot (-2)^3$
 b) $20 - 3 \cdot (-4)^3 + 6 \cdot (-2)^2$ e) $-2 \cdot 2^3 + 3 \cdot (-3)^3$
 c) $(-3)^2 - 6 \cdot 2^2 + (-3)^3 : (2 - 3)$ f) $12 - (2^2 - 10^2 : 5) + (-6)^2 : 4$