Números racionales. Ejercicios y problemas

1 Pasar a fracción:

$0.0051, \quad 0.\widehat{0051}, \quad 0.005\hat{1},$

2 Realiza las siguientes operaciones con potencias:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} =$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} =$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

j) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

k) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3} =$

l) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4} =$

m) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} : \left(\frac{27}{8}\right)^{-3} =$

3 Opera:

$$\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}\right] : \left[\left(\frac{1}{2}-1\right) : \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)\right] = \boxed{-4}$$

4 Efectúa

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}} =$$

5 Calcula qué fracción de la unidad representa:

1 La mitad de la mitad.

2 La mitad de la tercera parte.

3 La tercera parte de la mitad.

4 La mitad de la cuarta parte.

6 Elena va de compras con 180 €. Se gasta 3/5 de esa cantidad.¿Cuánto le queda?

7 Dos automóviles A y B hacen un mismo trayecto de 572 km. El automóvil A lleva recorridos los 5/11 del trayecto cuando el B ha recorrido los 8/13 del mismo. ¿Cuál de los dos va primero? ¿Cuántos kilómetros lleva recorridos cada uno?

8 Hace unos años Pedro tenía 24 años, que representan los 2/3 de su edad actual. ¿Qué edad tiene Pedro?

9 En las elecciones locales celebradas en un pueblo, 3/11 de los votos fueron para el partido A, 5/10 para el partido B, 5/14 para C y el resto para el partido D. El total de votos ha sido de 15 400. Calcular:

1 El número de votos obtenidos por cada partido.

2 El número de abstenciones sabiendo que el número de votantes representa 5/8 del censo electoral.

10 Un padre reparte entre sus hijos 1 800 €. Al mayor le da 4/9 de esa cantidad, al mediano 1/3 y al menor el resto. ¿Qué cantidad recibió cada uno? ¿Qué fracción del dinero recibió el tercero?

1. Proporcionalidad directa e inversa

1.1. Razón y proporción

No se debe confundir razón con fracción. En la fracción sólo se pueden utilizar números enteros, mientras que en la razón se pueden usar números decimales.

Se llama **razón** de dos números al cociente indicado de dichos números.

Por ejemplo, la razón de 1 y 10; 3,5 y 9; 7 y 0,4; 1,6 y 5,8... sería: $\frac{1}{10}$; $\frac{3,5}{9}$; $\frac{7}{0,4}$; $\frac{1,6}{5,8}$, etc.

Los términos de una razón $\frac{a}{b}$ se conocen como el **antecedente,** el numerador «a», y el **consecuente,** el denominador «b».

En toda proporción la división del antecedente entre el consecuente nos da un valor fijo llamado **constante de proporcionalidad:**

$$\frac{5}{2} = \frac{3,75}{1,5} = 2,5$$

Si dos razones constituyen una igualdad dan lugar a una **proporción.** En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los términos a y d se denominan **extremos,** mientras que b y c se conocen como **medios.**

Una proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se lee: «a es a b, como c es a d».

Propiedades

a) En toda proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot d$$

b) En una proporción, siempre, la suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a una cualquiera de las razones:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Ejemplo

Si la proporción es: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ comprobemos las propiedades anteriores.

a) $a \cdot d = b \cdot c$ es decir: $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$; $6 = 6$

b) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es decir: $\frac{1+3}{2+6} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

1. Averigua el término que falta para que formen proporción:

   A) $\frac{3}{5} = \frac{x}{10}$ B) $\frac{3,5}{2} = \frac{5,25}{x}$ C) $\frac{x}{5}$ y $\frac{1,65}{3}$

2. Forma razones con la suma de antecedentes y consecuentes de las siguientes proporciones y comprueba que forman proporción con ellas:

   A) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ B) $\frac{4}{5} = \frac{6}{7,5}$ C) $\frac{3}{7} = \frac{4,5}{10,5}$

1.2. Proporcionalidad directa

Una **magnitud** es cualquier propiedad física que puede ser medida. Por ejemplo, la longitud, la masa, el tiempo, etc.

Se dice que dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al aumentar o disminuir una, lo hace la otra de la misma forma.

Ejemplo

Si el kg de naranjas está a 1,8 euros, me costará el doble si compro 2 kg, el triple si compro 3 kg, y así sucesivamente. Ambas magnitudes (cantidad y precio) aumentan de la misma forma.

Cantidad (kg)	1	2	3	...
Precio (euros)	1,8	3,6	5,4	...

Observa que las razones entre estas magnitudes (peso y precio) forman una proporción; es decir:

$$\frac{1}{1{,}8}=\frac{2}{3{,}6}=\frac{3}{5{,}4}$$

Siempre que esto sucede, se puede hablar de proporcionalidad directa.

kg	3	7
Euros	5,4	x

En magnitudes directamente proporcionales, el **cociente** entre ellas siempre es constante; por tanto:

$$\frac{3}{5{,}4}=\frac{7}{x}\Rightarrow 3\cdot x=5{,}4\cdot 7$$

$$x=\frac{5{,}4\cdot 7}{3}=12{,}6 \text{ euros}$$

3. Escribe tres pares de magnitudes que sean directamente proporcionales.
4. Si un metro de tela cuesta 6,5 euros:
   A) ¿Cuánto me costarán 3 m?
   B) ¿Qué longitud podré comprar con 50 euros?
5. Si en una oferta del supermercado dan 3 kg de manzanas por 2 euros:
   A) ¿Cuánto costarán 5 kg?
   B) ¿Cuántos kg podré comprar con 5 euros?
6. Un tren ha recorrido 49 km en 20 minutos.
   A) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los siguientes 100 km?
   B) ¿Cuántos km llevará recorridos después de otros 5 minutos?
7. Si un coche gasta 6 litros de gasoil en 100 km:
   A) ¿Cuánto gastará en un viaje de 470 km?
   B) ¿Cuántos km podrá hacer con el depósito lleno con 70 litros?

1.3. Proporcionalidad inversa

Hay casos como puede ser una construcción en la que si un obrero tarda 30 días en realizar un trabajo, dos obreros tardarán la mitad (15 días), tres obreros tardarán la tercera parte (10 días) y así sucesivamente; es decir, al aumentar o disminuir una magnitud, la otra lo hace a la inversa, disminuye o aumenta. En estos casos se dice que tales magnitudes son **inversamente proporcionales.**

Obreros	1	2	3	...
Días	30	15	10	...

En este caso se observa que se cumple que el producto entre magnitudes es constante: $1\cdot 30=2\cdot 15=3\cdot 10$; por lo tanto, si se quiere saber cuánto tardarán en hacer dicha obra 5 obreros, bastará con calcular qué número multiplicado por 5 da como producto 30, que no puede ser otro que el 6; siendo ése el resultado buscado.

Obreros	3	6
Días	10	x

En magnitudes inversamente proporcionales, el **producto** entre ellas es siempre constante; por tanto:

$$3\cdot 10=6\cdot x$$

$$x=\frac{3\cdot 10}{6}=5 \text{ días}$$

8. Escribe tres parejas de magnitudes inversamente proporcionales.
9. Cinco agricultores recogen una cosecha en 14 días.
   A) ¿Cuánto tardarán en recogerla 8 agricultores?
   B) ¿Cuántos tienen que trabajar para recogerla en 7 días?

10. Un tren ha hecho un recorrido en 3 horas a una velocidad de 60 km/h.
    A) ¿Cuánto tardará si disminuye a 50 km/h?
    B) ¿A qué velocidad tendrá que ponerlo para tardar sólo 2 horas?
11. Un rectángulo tiene 22 cm de base y 15 cm de altura. Si queremos construir otro rectángulo de la misma área pero con 10 cm de base, ¿cuánto debe tener de altura?
12. Completa la tabla para que las magnitudes A y B sean inversamente proporcionales:

A	0,875		7	1,75
B		0,7	0,5	

2. Porcentajes. Aplicación

Es frecuente oír que tal o cual artículo tiene una rebaja del 30 por ciento o que el IVA aplicable a una factura es 18 por ciento. Ambas expresiones definen el **porcentaje,** es decir, el número de partes referidas de las cien iguales en que se puede dividir una cantidad (en estos casos el precio del artículo o el importe de la factura), que constituye la rebaja ofertada o el sobrecoste que se habrá de pagar por el IVA. El signo del tanto por ciento es %.

Matemáticamente hablando, un porcentaje no es otra cosa que una razón cuyo consecuente es 100, por ejemplo:

$$1\% = \frac{1}{100} \qquad 3{,}7\% = \frac{3{,}7}{100} \qquad 13\% = \frac{13}{100}$$

Al ser una división entre 100 podemos, fácilmente, pasar esa razón a número decimal:

$$1\% = 0{,}01 \qquad 3{,}7\% = 0{,}037 \qquad 13\% = 0{,}13$$

¡Recuerda!

Al utilizar proporciones, lo verdaderamente importante es que guardes el orden en las razones. Por ejemplo, si en la primera razón has puesto:

$$\frac{\text{Porcentaje}}{\text{Cantidad}}$$

en la siguiente razón debes poner también:

$$\frac{\text{Porcentaje}}{\text{Cantidad}}$$

y no al revés. Fíjate en los ejemplos.

Ejemplo

1. Calcula el 30% de 400 euros:

1ª forma: por proporciones

$$\frac{100}{400} = \frac{30}{x} \Rightarrow x = \frac{400 \cdot 30}{100} = 120 \text{ euros}$$

2ª forma: con decimales

30% = 0,30; entonces

$0{,}30 \cdot 400 = 120$ euros

El 30% de 400 euros son 120 euros

Siempre que esto sucede, se puede hablar de la proporcionalidad directa.

2. Calcula el número de estudiantes de una clase sabiendo que en junio aprobaron todas las materias 44, y éstos representan el 80% de la clase.

1ª forma: por proporciones

$$\frac{80}{44} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{44 \cdot 100}{80} = 55$$

2ª forma: con decimales

80% = 0,80; entonces

44 : 0,80 = 55 estudiantes

El número de estudiantes de la clase es 55

3. Calcula el porcentaje que representan los 6 estudiantes con ojos azules en una clase de 24:

1ª forma: por proporciones

$$\frac{100}{24} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 100}{24} = 25\%$$

2ª forma: con decimales

6 : 24 = 0,25 = 25%

Los de ojos azules representan el 25% de la clase

1. Calcula:
   A) 28% de 560 B) 30% de 110 C) 3,4% de 244 D) 12,5% de 600
2. En una oficina con 50 personas, el 32% son hombres. Calcula el número de hombres y mujeres.
3. En una fábrica, 560 personas cobran menos de 1.000 euros, representando el 80% de la plantilla. ¿Cuántos trabajan en total en la fábrica? ¿Cuántos cobran más de 1.000 euros?

2.1. Descuentos porcentuales

En rebajas, generalmente, se anuncia el porcentaje de descuento que se aplica al artículo; es decir, la cantidad que no se paga. ¿Cómo calcular, entonces, el precio a pagar? Como se ha visto en el epígrafe anterior estos cálculos pueden realizarse de dos formas: mediante proporciones u operando con números decimales.

Ejemplo

1. Una camisa tiene un precio de 25 euros con una rebaja del 20%. ¿Cuánto pagaremos por ella?

   Una forma de solucionar el problema será calcular cuánto es el 20% de 25 y luego restarle esa cantidad a 25; pero será más rápido razonando de la siguiente forma: como el descuento es el 20%, quiere decir que voy a pagar el 80% (100% – 20% = 80%). Entonces:

   1ª forma: por proporciones

   $$\frac{100}{25} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 80}{100} = 20 \text{ euros}$$

   2ª forma: con decimales

   80% = 0,8 por tanto

   $0{,}8 \cdot 25 = 20$ euros

   Por la camisa pagaremos 20 euros

2. Por un televisor rebajado un 30% he pagado 665 euros, ¿cuál era su precio inicial antes de la rebaja?

   El razonamiento en este caso es: si la rebaja es el 30%, pago el 70% (100% – 30% = 70%)

   1ª forma: por proporciones

   $$\frac{70}{665} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{665 \cdot 100}{70} = 950 \text{ euros}$$

   2ª forma: con decimales

   70% = 0,7 por tanto

   $665 : 0{,}7 = 950$ euros

   El precio inicial del televisor, antes de la rebaja, era 950 euros

2.2. Aumentos porcentuales

Aquí se presenta el caso contrario al estudiado en el punto anterior.

Ejemplo

1. Un fontanero cobra por cambiar un grifo 125 euros, pero al hacer la factura ha de incluir el IVA (Impuesto sobre el Valor Añadido) que es un 18%. ¿Cuánto tendremos que pagar en total?

   Razonamiento: si se añade el 18%, entonces vamos a pagar el 118% en total:

   100% + 18% = 118%

   1ª forma: por proporciones

   $$\frac{100}{125} = \frac{118}{x} \Rightarrow x = \frac{125 \cdot 118}{100} = 147{,}5 \text{ euros}$$

   2ª forma: con decimales

   118% = 1,18 entonces

   $1{,}18 \cdot 125 = 147{,}5$ euros

   El importe a pagar por la factura será 147,5 euros

2. En un hotel han cargado un IVA del 7%, resultando el precio final 97 euros. ¿Cuál era el precio antes sin impuestos?

   Razonamiento: si nos han cargado el 7%, vamos a pagar el 107% del precio de la habitación, luego:

   1ª forma: por proporciones

   $$\frac{107}{97} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = \frac{97 \cdot 100}{107} = 90{,}65 \text{ euros}$$

   2ª forma: con decimales

   107% = 1,07 entonces

   $97 : 1{,}07 = 90{,}65$ euros

   El precio de la habitación, antes de impuestos, es 90,65 euros

PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

Para resolver un problema de proporcionalidad compuesta debes seguir los siguientes pasos:

1º.- Plantea la regla de tres. Expresa las cantidades de la misma magnitud en la misma unidad.

2º.- Compara cada magnitud con la que lleva la x para ver si la proporcionalidad entre ellas es directa o inversa. Escribe D debajo de las directas e I debajo de las inversas.

3º.- Si hay alguna proporcionalidad inversa vuelve a plantear la regla de tres invirtiendo las cantidades en las que sean inversas.

4º.- Escribe una proporción de la siguiente forma: la primera razón con las cantidades de la magnitud donde está la x , la segunda razón con el producto de las cantidades de las demás magnitudes.

Fíjate en el siguiente ejemplo.

Un taller, trabajando 8 horas diarias, ha necesitado 5 días para fabricar 1 000 piezas. ¿Cuántos días tardará en hacer 3 000 piezas trabajando 10 horas diarias?

Nºpiezas		Horas día		Días
1000	——	8	——	5
3000	——	10	——	x
D		I		

(A doble de piezas, doble de días necesarios)
(A doble de horas diarias, mitad de días necesarios)

1000	——	10	——	5
3000	——	8	——	x

$$\frac{5}{x} = \frac{1000\,.\,10}{3000\,.\,8} \qquad x = \frac{5\,.\,3000\,.\,8}{1000\,.\,10} = 12$$

Tardará 12 días

EJERCICIOS DE PROPORCIONALIDAD Y PORCENTAJES

1) Si en una oferta del supermercado dan 3 kg de manzanas por 2 € :
   a) ¿Cuánto costaran 5 kg?
   b) ¿Cuántos kg podré comprar con 5 €?

2) Si un coche gasta 6 litros de gasoil en 100 km :
   a) ¿Cuánto gastará en un viaje de 470 km?
   b) ¿Cuántos km podrá hacer con el depósito lleno con 70 litros?

3) Un tren ha hecho un recorrido en 3 horas a una velocidad de 60 km/h.
   a) ¿Cuánto tardará si disminuye a 50 km/h?
   b) ¿A qué velocidad tendrá que ponerlo para tardar sólo 2 horas?

4) Un rectángulo tiene 22 cm de base y 15 cm de altura. Si queremos construir otro rectángulo de la misma área pero con 10 cm de base, ¿cuánto debe tener de altura?

5) En una oficina con 50 personas, el 32 % son hombres. Calcula el número de hombres y mujeres.

6) En una fábrica 560 personas cobran menos de 1.000 €, representando el 80 % de la plantilla. ¿Cuántos trabajan en total en la fábrica ?. ¿Cuántos cobran más de 1.000 €?

7) Al comprar un televisor de 999 € a plazos, te suben un 5 %. ¿Cuál será el precio final?

8) ¿Qué porcentaje de descuento me han aplicado si al comprar un reloj de 230€ he pagado 195 € ?

9) (examen 2010) En un examen de biología aprueba el 52 % del alumnado. Posteriormente, los suspendidos realizan una recuperación, aprobando el 25%. Si en total son 32 los aprobados.
   a) ¿Cuál es el porcentaje de aprobados?
   b) ¿Cuántos alumnos/as son en total?

10) (examen 2011) Las 3/4 partes de las plazas de un avión son de clase preferente y el resto de clase turista. El 40 % de las plazas de clase preferente y el 70 % de las de clase turista están ocupadas y el resto vacías. Si el total de plazas ocupadas son 228. ¿Cuál es el número total de plazas del avión?

2. Polinomios

La utilización de las letras para representar cantidades desconocidas permite la utilización de expresiones que simplifican el lenguaje matemático.

Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es aquella en la que se utilizan letras, números y los signos de las operaciones.

Ejemplos: $2xy + 5y - 3$

$\frac{1}{3}x + \sqrt{2}x - 3$

$\frac{9x}{10}$

Valor numérico de una expresión algebraica

Si en una expresión algebraica se sustituyen las letras por valores concretos y se realizan las operaciones indicadas se obtiene un número que es el "valor numérico" de la expresión algebraica para los valores de las letras dados.

Una expresión algebraica puede tener tantos valores numéricos como números se le asigne a cada una de las letras, o sea, infinitos.

Ejemplo: el valor numérico de $x^2 - 3$ para $x = 3$ es: $3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$
para $x = -1$ es : $(-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$
para $x = 1/2$ es : $(1/2)^2 - 3 = 1/4 - 3 = -11/4$

Clases de expresiones algebraicas:

Al número que multiplica a las letras le llamamos coeficiente, a la letra o letras les llamamos parte literal y al exponente le llamamos grado.

Ejemplo: Coeficiente $\longleftarrow$ $5x^3$ $\longrightarrow$ Grado
Parte literal $\longleftarrow$

Si hay más de una letra el grado de un término es la suma de los exponentes de cada una de las letras.

Ejemplo: Coeficiente $\longleftarrow$ $2\,\underbrace{a^5b^6c^2}$ $\longrightarrow$ Grado es 5 + 6 + 2 = 13
Parte literal $\longleftarrow$

Si una expresión algebraica está formada por un solo sumando (o término), los exponentes de las letras son naturales y la única operación entre letras y números es el producto se llama monomio.

Ejemplo: $4x^4$, $5bc^3$, $3/5\, x^3 y^5 \rightarrow$ son monomios
$2x/y$, $4x^{-3}$, $5x\, y^{-4} \rightarrow$ no son monomios

Monomios semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal y el mismo grado.

Ejemplo: $-3x^4y^3$, $5x^4y^3$, $1/2x^4y^3$, $-6x^4y^3 \rightarrow$ monomios semejantes
xy^3, $3xy^2$, $2xy \rightarrow$ no son monomios semejantes

Toda expresión algebraica que esté formada por la suma o resta de dos monomios se llama binomio.