Ejemplo: $5x^6 + 3xy$, $a - 3b$, $2x - 7y$ → son binomios

Si la expresión algebraica resulta de la suma o resta de varios monomios se llama polinomio.

Polinomios

Resultan de la suma o resta de varios monomios. Para ordenar un polinomio colocamos los monomios de mayor a menor, según su grado.

Ejemplo: $x^5 - 3x + 6x^4 + 3x^2 - 2x^6$ → $-2x^6 + x^5 + 6x^4 + 3x^2 - 3x$

Para completar un polinomio añadimos los términos que falten con coeficiente 0.

Ejemplo: $-2x^6 + 6x^4 + 3x^2 - 3x$ → $-2x^6 + 0x^5 + 6x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 3x$

Grado de un polinomio es el mayor exponente de sus términos. Grado de un polinomio con relación a una letra es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio.

Ejemplo: $x^4 + x^3y + x^2y^3 - xy^6$ es de grado 7, pero es de grado 4 respecto a la x y de grado 6 respecto a la y

Término independiente de un polinomio con relación a una letra es el término en que no aparece dicha letra.

Ejemplo: en $x^3 - x^2 + 3x - 6$ el término independiente es -6. Y en $x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 4x + 12$ el término independiente es 12.

El término independiente con relación a una letra puede considerarse que tiene esa letra con exponente 0.

Operaciones con monomios

Suma y resta.

Para sumar o restar dos monomios tienen que ser semejantes. La suma o resta es otro monomio semejante a ellos que tiene por coeficiente la suma o diferencia, según el caso, de los coeficientes.

Ejemplo: $5x^4y^3 - 6x^4y^3 = -x^4y^3$
$2x^3 - 4x^3 - 9x^3 = (2 - 4 - 9)x^3 = -11\,x^3$.
$4x^4y^3 + 2x^2y = 4x^4y^3 + 2x^2y$. Observa que no se pueden sumar al no ser semejantes.

Producto

Para multiplicar monomios, se multiplican los coeficientes de cada uno entre sí, teniendo en cuenta el signo, y la parte literal, considerando que para multiplicar potencias que tengan la mima base se suman los exponentes.

Ejemplo: $2x^3 \cdot 5x^7 = 10\,x^{10}$
$-x^5y^5 \cdot 2x^2 \cdot 3x^4 = -6\,x^{11}\,y^5$
$4x^4y^5 \cdot 2x^2y \cdot 3x^3 = 24\,x^9\,y^6$

División

Dos monomios se pueden dividir siempre que el grado del dividendo sea mayor o igual que el grado del divisor.

Para dividir monomios, se dividen los coeficientes de cada uno entre sí, teniendo en cuenta el signo, y la parte literal, considerando que para dividir potencias que tengan la mima base se restan los exponentes.

Si en el divisor aparece una letra con una potencia mayor que en el dividendo, el resultado no sería un monomio pues quedaría, al restar los exponentes, un exponente negativo (recuérdese que los exponentes de las letras deben ser positivos).

Ejemplo: $4x^4y^3 : 2x^2y = 2\,x^2y^2 \rightarrow$ es un monomio
$6x^4y : x^3 = 6xy \rightarrow$ es un monomio
$2x^2y : (-3x\,y^3) = -\,2/3\,x\,y^{-2} \rightarrow$ no es un monomio

Operaciones con polinomios

Suma y resta

Para sumar o restar polinomios se suman o restan los monomios semejantes. Se pueden colocar uno bajo otro o realizar la operación directamente.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rl} & 7x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x \\ + & 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 - x \\ \hline & 10x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x \end{array}$$

Ejemplo: $(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7) + (5x^3 - x^2 + 5x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7 + 5x^3 - x^2 + 5x = 4x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 3x + 7$

Si en lugar de sumar dos polinomios se tratara de restarlos, bastaría cambiar el signo a todos los términos del segundo y sumar los resultados.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rl} & 7x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x \\ - & 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 - x \end{array} \rightarrow \begin{array}{rl} & 7x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x \\ + & -3x^5 - 0x^4 - 0x^3 + x^2 + x \\ \hline & 4x^5 + 0x^4 + 3x^3 + 6x^2 - x \end{array}$$

Ejemplo: $(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7) - (5x^3 - x^2 + 5x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7 - 5x^3 + x^2 - 5x = 4x^4 - 7x^3 - x^2 - 7x + 7$

Producto

Para multiplicar dos polinomios se deben multiplicar todos los monomios de uno por todos los del otro y sumar los monomios semejantes. Se pueden colocar uno bajo otro o realizar la operación directamente.

Ejemplo: $(2x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) \cdot 3x^3 = 6x^8 + 9x^7 - 6x^6 - 3x^5 + 6x^4$

Polinomio · monomio

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x \\ 2x^3 + 2x \\ \hline +2x^6 + 10x^5 - 2x^4 - x^3 + 4x^2 \\ 4x^8 + 10x^7 - 4x^6 - 2x^5 + 4x^4 \\ \hline 4x^8 + 10x^7 - 2x^6 + 8x^5 + 2x^2 - x^3 + 4x^2 \end{array}$$

Polinomio · Polinomio

Ejemplo: $(4x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 7)(x^2 + 5x) = 4x^6 + 20x^5 - 2x^5 - 10x^4 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^3 - 10x^2 + 7x^2 + 35x = 4x^6 + 18x^5 - 12x^4 - 12x^3 - 3x^2 + 35x$

División

Con los polinomios dividendo y divisor ordenados de mayor a menor grado:

Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor, dando lugar al primer término del cociente.

Se multiplica dicho término por el divisor y se coloca debajo del dividendo con los signos contrarios, cuidando que debajo de cada término se coloque otro semejante.

Se suman los polinomios colocados al efecto, obteniéndose un polinomio de grado menor al inicial.

Se continua el proceso hasta que el resto ya no se pueda dividir entre el divisor por ser de menor grado.

Ejemplo :

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4x - 5 & 2x \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4} & 2x^3 - x^2 + 3x - 2 \\
\quad 0 - 2x^3 & \\
\qquad \underline{+2x^3} & \\
\qquad\quad 0 + 6x^2 & \\
\qquad\qquad \underline{-6x^2} & \\
\qquad\qquad\quad 0 - 4x & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{+4x} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 - 5 &
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D(x):d\,(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2 \\ R(x) = -5 \end{array}}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 4x - 5 & 2x^2 + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^4 \qquad -2x^2} & 2x^2 - 3x + 2 \\
\quad 0 \; -6x^3 + 4x^2 - 4x & \\
\qquad \underline{6x^3 + \qquad +3x} & \\
\qquad\quad 0 + 4x^2 \; -x \; -5 & \\
\qquad\qquad \underline{-4x^2 \qquad -2} & \\
\qquad\qquad\quad 0 \; - x - 7 &
\end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} D(x):d(x) = 2x^2 - 3x + 2 \\ R(x) = -x - 7 \end{array}}$$

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini se utiliza fundamentalmente cuando el polinomio dividendo tiene como única letra (variable) la x y el divisor es un binomio del tipo (x – a), siendo "a" un número entero; por ejemplo (x – 1), (x + 2), etc.

Se deben colocar todos los coeficientes del dividendo ordenados de mayor a menor grado y si falta el de algún grado intermedio colocar un 0.

Se "baja" el primer coeficiente del dividendo.

Se multiplica "a" por el coeficiente bajado y se coloca el resultado debajo del segundo coeficiente (el signo de a será positivo si el divisor es del tipo (x – a) y negativo si el divisor es del tipo (x + a).

Se suma el segundo coeficiente con el resultado anterior.

Se continúa el proceso hasta terminar con los coeficientes.

Los números de la fila inferior obtenida son los coeficientes del cociente (de un grado menor al dividendo) excepto el último número que es el valor del resto.

Ejemplo: $(x^3 + x^2 - 15x - 1):(x + 5)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -15 & -1 \\ -5 & & --5 & 20 & -25 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & -26 \end{array}$$

El cociente es $x^2 - 4x + 5$ y el resto es -26

Ejemplo: $(x^3 + - 6x - 1):(x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -6 & -1 \\ 2 & & 2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & -5 \end{array}$$

El cociente es $x^2 + 2x - 2$ y el resto es -5

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio P(x) entre un binomio de la forma (x – a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x toma el valor "a" que podemos expresar como P(a)

Ejemplo: $(x^3 - 3x^2 + 2x - 8):(x - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & -3 & 2 & -8 \\ 4 & & 4 & 4 & 24 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 16 \rightarrow \text{resto} \end{array}$$

$P(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 8 = 64 - 48 + 8 - 8 = 16$

El valor numérico del polinomio en x = 4 coincide con el resto siendo el divisor x - 4

Factorización de polinomios

Si se realiza el producto $(x - 2)\cdot(x + 4)$ se obtiene $x^2 + 2x - 8$ por lo que puede expresarse dicho polinomio como producto de factores: $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)\cdot(x + 4)$.

Conseguir, cuando sea posible, expresar un polinomio como producto de binomios de primer grado, o al menos algún binomio de ese tipo, es lo que se denomina "factorizar el polinomio".

Para conseguir factores del tipo mencionado (x - a), bastará encontrar valores de "a" para los que la división, que se efectúa por la regla de Ruffini, sea exacta, o sea que el resto sea 0 y aplicar que **"Dividendo = divisor · cociente + resto"** con lo que quedaría en términos de polinomios con la variable x: $D(x) = d(x) \cdot c(x)$ obteniéndose ya el polinomio dividendo descompuesto en dos factores.

Una regla muy útil: Los valores de "x = a" enteros, para los que el valor numérico de un polinomio es cero, son siempre divisores del término independiente del polinomio.

Los valores x = a tal que P(a) = 0 se denominan raíces del polinomio.

Ejemplo: para $x^2 + x - 2$ las posibles raíces enteras son: ± 1, ± 2,

$P(1) = 1 + 1 - 2 = 0$
$P(-1) = 1 - 1 - 2 = -2$
$P(2) = 4 + 2 - 2 = 4$
$P(-2) = 4 - 2 - 2 = 0$
Las raíces son $x = 1$, $x = -2$ $\rightarrow$ $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$

Ejemplo: para $2x^2 + x - 3$ las posibles raíces enteras son: ± 1, ± 3,

$P(1) = 2 + 1 - 3 = 0$

La raíz es $x = 1$ hacemos la división para encontrar el cociente

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 1 & -3 \\ 1 & & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x - 3)$

Antes de aplicar Ruffini, si se puede, se sacan factores comunes.

Ejemplo: $2x^3 + x^2 - 3x = x(2x^2 + x - 3) = x(x - 1)(2x - 3)$

Igualdades notables

Cuadrado de un binomio suma $(a + b)^2$ o diferencia $(a - b)^2$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero más dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero menos dos veces el primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplo: $(x + 2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$
$(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
$(-x + 5)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

Suma por diferencia. Se refiere al producto de un binomio suma por ese mismo binomio diferencia.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba + b^2 = a^2 - b^2$$

Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados.

Ejemplo: $(x + 2y)(x - 2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$
$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$
$(-x + 5)(-x - 5) = (-x)^2 - 5^2 = x^2 - 25$

Cubo de una suma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ejemplo: $(x + 2y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2y + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 4y^2$
$(-x + 5)^3 = (-x)^3 + 3 \cdot (-x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (-x) \cdot 5^2 + 5^3 = -x^3 + 15x^2 - 75x + 125$

Cubo de una diferencia: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Ejemplo: $(x - 3)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 3 + 3 \cdot x \cdot 3^2 - 3^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

Cuadrado de un trinomio: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Ejemplo: $(x + 2y + 1)^2 = x^2 + (2y)^2 + 1^2 + 2\cdot x\cdot 2y + 2\cdot x\cdot 1 + 2\cdot 2y\cdot 1 =$
$= x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy + 2x + 4y$

Actividades resueltas

1. De las siguientes expresiones algebraicas indica cuáles son polinomios:

a. $2x - \dfrac{3}{x}$ b. $x^3 - 5x^{-6} + 1$ c. $2xy - 3x^2$

d. $(2x - 3)^3$ e. $3\sqrt{x} + 5x - 1$ f. $-\sqrt{3}x^8 - 2$

a. b. y e. no son polinomios pues los exponentes de las variables no son números enteros

2. Indica en los siguientes polinomios:

$A(x) = 5x^3 - \dfrac{2}{5} - 9x^7$ $B(x) = 3x^2y - 5x^3y^5 - 5 - 7x^9$

a. El número de términos o monomios de cada polinomio.

b. El coeficiente, la parte literal y el grado de cada monomio.

c. El grado del polinomio.

d. El término independiente del polinomio.

e. El coeficiente principal del polinomio.

f. Ordénalos de forma creciente.

$A(x) = 5x^3 - \dfrac{2}{5} + 9x^7$ $B(x) = 3x^2y - 5x^3y^5 - 5 - 7x^9$

Términos	$5x^3$	-2/5	$9x^7$	$3x^2y$	$-5x^3y^5$	-5	$-7x^9$
Coeficiente	5	-2/5	-9	3	-5	-5	-7
Parte literal	x^3	No tiene	x^7	x^2y	x^3y^5	No tiene	x^9
Grado	3	0	7	3	8	0	9
Grado polinomio			7				9
T. independiente		-2/5				-5	
Coeficiente principal			-9				-7
Ordenados	$-9x^7 + 5x^3 - 2/5$			$-7x^9 - 5x^3y^5 + 3x^2y - 5$			

3. Halla el valor numérico para x = 6, x = -2 y x = 1/2 de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $x + 5$ b. $3(x - 2)$ c. $3x^2 - x$ d. $\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x + 4$

d. Posibles raíces: 1, -1, 3 -3

$P(1) = 1 + 2 - 3 = 0$

$$\boxed{x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)(x-1)(x+3)}$$

	1	1	-5	3
1		1	2	-3
	1	2	-3	0
1		1	3	
	1	3	0	

e. $x^3 + x^2 - 2x = x\,(x^2 + x - 2)$

Posibles raíces: 1, -1, 2, -2

	1	1	-2
1		1	2
	1	2	0

$$\boxed{x^3 + x^2 - 2x + 3 = x\,(x-1)(x+2)}$$

Observa que antes de aplicar Ruffini hemos sacado factor común.

Actividades propuestas

1. Indica qué expresiones son polinomios y decir el grado del polinomio, el término independiente y el coeficiente del término de mayor grado:

   a. $\frac{1}{5}x^3 - x + 1$ b. $\frac{x^2+1}{2}$ c. $\sqrt{x+2}$ d. $5x^4 - 3x^2y + 7$

2. Dados los polinomios siguientes, hallad los valores numéricos que se indican:

   a. $P(x) = x^2 + x - 2$ $x = 3$

   b. $Q(x) = -x^3 + x - 5$ $x = -2$

3. Calcula las siguientes sumas o restas:

   a. $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$ $Q(x) = x^2 - 7x - 3$ $P(x) + Q(x)$

   b. $P(x) = 3x^2 - 5x + 1$ $Q(x) = x^2 + 7x - 2$ $P(x) - Q(x)$

   c. $P(x) = 3x^2 - 1$ $Q(x) = x^3 - 7x - 5x^2 - 3$ $P(x) + Q(x)$

   d. $P(x) = (7x^3 - 5x^8 + 6x^2 - 1)$ $Q(x) = (x - 5x^4 - 3x^2 - 1)$ $P(x) - Q(x)$

4. Calcular los siguientes productos de polinomios:

   a. $(2x^2 + 1)\cdot(3x - 2) =$

   b. $(3x^4 + 5x^3 - 2x + 3)\cdot(2x^2) =$

   c. $(x + 1)\cdot(x + 1) =$

   d. $(x + 2)\cdot(x - 2) =$

5. Calcula los cuadrados de los binomios que se indican:

   a. $(x+3)^2$ b. $(2x+4)^2$ c. $(3x-2)^2$ d. $\left(2x^2 - x\right)^2$

6. Realiza las siguientes operaciones simplificando el resultado todo lo posible:

   a. $(m+p)^2-(m-p)^2$ b. $(2x-3)(2x+3)$ c. $(2x+3)^3$

7. Efectuar las siguientes divisiones de polinomios:

   a. $\left(3x^5+2x^4-7x^3+2x-3\right):\left(x^2\right)=$
   b. $\left(3x^4+5x^3-2x+3\right):\left(x^2-3x+2\right)=$
   c. $\left(3x^5-2x^3+7x^2-2x\right):\left(x^3+3x^2-1\right)=$

8. Determina el polinomio cociente y el resto aplicando la Regla de Ruffini:

   a. $\left(x^4-2x^2+3x^3-1\right):(x+2)$ b. $\left(4x^3-2x+1\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

9. Utilizando la Regla De Ruffini, halla el valor numérico de:

   a. x^4-2x^2+x+2 para $x=3$
   b. x^4-4x^3-125 para $x=5$

10. Determinar el valor de m para que al dividir el polinomio $P(x)=x^4-4x^2+3x+m$ entre $x+2$ el resto sea -3.

11. Determinar el valor de a para que 3 sea raíz del polinomio $q(x)=x^3-6x^2+ax-2$.

12. Comprobar si las siguientes afirmaciones son ciertas:

   a. 3 es una raíz de $x-3$
   b. 1 es una raíz de x^4-3x^3+2x-5

13. Descomponer en factores los siguientes polinomios:

   a. x^3+x^2-x-1
   b. x^3-2x^2+x
   c. x^3-2x^2+2x-4
   d. $2x^3-2x^2+x-1$
   e. $9x^2-25$
   f. x^2-6x+9
   g. $9x^4+6x^2+1$

14. Al dividir un polinomio P(x) entre x^2+2 el cociente que se obtiene es $2x^2+3x-5$ y el resto $x+3$. Calcula el polinomio P(x).

EJERCICIOS EXAMENES : GRADO SUPERIOR Y ACCESO UNIVERSIDAD

TEMAS 1 y 2: Números y Polinomios

1ª) **(Cicles 2009)** A Marina, Elena y José les ha tocado la lotería y tienen que repartirse un premio de 3.000 €. Completa, razonando las respuestas y haciendo todas las operaciones que consideres necesarias, la siguiente tabla para saber qué premio les corresponde a cada uno teniendo en cuenta que el reparto es proporcional a lo jugado.

	MARINA	ELENA	JOSE	TOTAL
Dinero jugado	10 €	20 €	30 €	60€
Premio conseguido				3.000€

2ª) **(Cicles 2008)** Calcula m para que el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 9x + 9$ sea divisible por $x - 3$.

3ª) **(Cicles 2007)** Calcular m para que el polinomio $P(x) = x^3 + mx^2 - 11x - 12$, sea divisible por $x - 3$

4ª) **(Cicles 2006)** Calcular m para que el polinomio $P(X) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$, sea divisible por $x + 1$

5ª) **(Cicles 2004)** Encuentra un polinomio sabiendo que al dividirlo entre $x^3 + 9$ obtenemos de cociente $x^2 - 5x + 6$ y de resto $x^2 - x + 9$

6ª) **(Universitat 2005)** Encontrar las raíces de la ecuación

$X^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

7ª) **(Universitat Posible prueba)** Calcular el cociente y el resto que resulta al dividir el polinomio $x^3 - 3x^2 + 7x + 2$ entre $x - 3$

Factoriza los siguientes polinomios:

$A(x)=x^2-5x-6$

$B(x)=x^5-5x^4-6x^3$

$C(x)=x^3-x$

$D(x)=x^3+3x^2-4x$

$E(x)=x^4-5x^2+4$

$F(x)=x^3+4x^2+4x$

$G(X)=x^3-3x+2$

$H(x)=x^4+2x^3-23x^2-60x$

$I(x)=x^5+8x^4+21x^3+18x^2$

$J(x)=9x^4-36x^3+26x^2+4x-3$

$K(x)=2x^5+2x^4-2x^3-2x^2$

$L(x)=4x^4-37x^2+9$

$M(x)=6x^4+21x^3+24x^2+9x$

$N(x)=x^5+10x^4+32x^3+40x^2+31x+30$

$O(x)=x^6+2x^5-2x^3-x^2$

$P(x)=x^6+2x^5-14x^4+5x^3+4x^2+20x$

$Q(x)=x^3-7x^2+14x-8$

$R(x)=x^4-4x^3+4x^2-4x+3$

$S(x)=2x^3+2x^2-24x$

$T(x)=x^4+9x^3-10x^2$