3. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Igualdades

Una igualdad es una relación de equivalencia entre dos expresiones numéricas o algebraicas. Cada una de las expresiones separadas por el signo igual recibe el nombre de miembro.

$$\text{Primer miembro} = \text{Segundo miembro}$$

$$2x^2 - 1 = x - 5$$

Si las expresiones son algebraicas a las letras se les llama incógnitas.

Identidades

Una igualdad de expresiones que se cumple para cualquier valor de la incógnita se denomina identidad. Una identidad es numérica si la igualdad se cumple entre números.

Ejemplo: $2 + 4 + 5 = 1 + 10$

Una identidad literal es una igualdad que se cumple para cualquier valor que tomen las incógnitas.

Ejemplo: $2x + 3x = 5x$
Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$2(x - 1) + 2x = 4x - 2$

Ecuaciones

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas que se satisface sólo para determinados valores de las incógnitas.

Ejemplos: a) $x + 2 = 0$ es una ecuación con una incógnita.
b) $3x + 2y = 1$ es una ecuación con dos incógnitas.

Al valor, o valores, que satisfacen la igualdad se les llama solución (o raíz) de la misma. Resolver una ecuación es hallar su solución.

Ejemplo: Una solución de la ecuación $x - 3 = 1$ es $x = 4$.
Soluciones de $3x - 2y - 1 = 0$ son $x = 1$, $y = 1$; $x = 0$, $y = -1/2$; $x = 2$, $y = 5/2$
$x^2 - 1 = 0$ tiene dos soluciones, $x = 1$ y $x = -1$
$x^2 + 1 = 0$ es una ecuación sin soluciones en R.
$2x + 3y = 0$ tiene infinitas soluciones: (0,0), (-3,2), (3, -2)....

Ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones más sencillas son las de primer grado: aquellas en las que la incógnita tiene exponente 1.

Resolver una ecuación consiste en averiguar la incógnita pasando por diferentes ecuaciones equivalentes aplicando convenientemente las reglas siguientes.

"Si sumamos o restamos un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación la igualdad se mantiene y obtenemos una ecuación equivalente a la primera".

Ejemplo: $x + 5 = 7 \quad \rightarrow \quad (x + 5 - 5 = 7 - 5) \quad \rightarrow \quad x = 7 - 5$

Observa que se corresponde con la famosa frase: "lo que está sumando pasa restando y viceversa".

"Si multiplicamos o dividimos por un mismo número o expresión algebraica los dos miembros de una ecuación la igualdad se mantiene y obtenemos una ecuación equivalente a la primera".

Ejemplo: $2x = 4 \rightarrow \quad \frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow \quad x = 4/2 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Observa que se corresponde con la famosa frase: "lo que está multiplicando pasa dividiendo y viceversa".

No todas las ecuaciones tienen solución:

Ejemplo: $3x + 5 = 3x - 6$

Si al triple de un nº le sumas 5 el resultado nunca coincidirá con el resultado de restarle 6.

Pasos para resolver una ecuación:

1º- Se quitan los paréntesis si los hay.

2º- Se quitan los denominadores si los hay con ayuda del mcm de los denominadores.

3º- Se pasan todas las incógnitas al 1^{er} miembro de la igualdad (transponer términos).

4º- Se reducen los términos semejantes.

5º- Hallamos el valor de la incógnita.

Ejemplo: $5x - 7 = 28 + 3x$;

$5x - 3x = 28 + 7$;

$2x = 35 \rightarrow x = 35/2$

Ejemplo: $2(x - 3) = 5x + 4$;

$2x - 6 = 5x + 4$;

$2x - 5x = 4 + 6$;

$-3x = 10 \rightarrow x = -10/3$

Ejemplo: $\frac{2-x}{2} - \frac{x+1}{3} = 4$; mcm (2,3) = 6

$$\frac{3(2-x)}{6} - \frac{2(x+1)}{6} = \frac{6\cdot 4}{6}$$

$$3(2-x) - 2(x+1) = 24$$

$6 - 3x - 2x - 2 = 24$

$4 - 5x = 24$

$-5x = 24 - 4 = 20$

$x = 20/-5 = -4$

Ecuaciones de segundo grado

Tenemos una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática, cuando la variable o incógnita está elevada al cuadrado (elevada a exponente 2).

Ejemplos: $7x^2 + 5x - 24 = 0$, $x^2 + 5x = -85$, $13x^2 = 7$, $4x^2 - 4x = 0$

En general, una ecuación cuadrática tiene la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ donde a, b y c son números reales; x es la incógnita o variable.

Veamos cómo se resuelven estas ecuaciones en función de los casos que se presenten.

Si es de la forma $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$

Sacando factor común x en el primer miembro, resulta: $x(ax + b) = 0$.

Para que un producto de dos factores x y (ax + b), dé como resultado cero, uno de ellos debe ser cero: $x = 0$ ó $ax + b = \rightarrow x = -b/a$

En consecuencia, las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ tienen dos soluciones: $x_1 = 0$ y $x_2 = -b/a$

Ejemplo: $5x^2 + 4x = 0$
$x(5x + 4) = 0$
$x = 0$
$5x + 4 = 0 \rightarrow x = -4/5$:

Si es de la forma $ax^2 + c = 0$ $(b = 0)$

Despejando $x^2 = -c/a \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Si $-\frac{c}{a}$ es negativo, la ecuación no tiene solución, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Ejemplo: $5x^2 + 125 = 0 \rightarrow 5x^2 = -125 \rightarrow x^2 = -125/5 = -25 \rightarrow x = \sqrt{-25} \rightarrow$ no hay solución

Si $-\frac{c}{a}$ es positivo, la ecuación tiene dos soluciones.

Ejemplo: $5x^2 - 125 = 0 \rightarrow 5x^2 = 125 \rightarrow x^2 = 125/5 = 4 \rightarrow x = \sqrt{25} \rightarrow x = \pm 5$

Si es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Para hallar directamente las raíces aplicaremos la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$ se llama discriminante de la ecuación de 2º y se verifica:

Si $D > 0$ la ecuación tiene dos soluciones

Si $D = 0$ la ecuación tiene una única solución (doble)

Si $D < 0$ la ecuación no tiene ninguna solución real.

Ejemplo: $3x^2 - 2x - 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6} = \begin{cases} 10/6 = 5/3 \\ -6/6 = -1 \end{cases}$$

Ejemplo: $3x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4{\cdot}3{\cdot}5}}{2{\cdot}3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-60}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-54}}{6} \quad \text{no tiene solución}$$

Ejemplo: $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1}}{2{\cdot}3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{6} = \frac{2 \pm 0}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{solución doble}$$

Descomposición en factores de un polinomio de grado superior a dos

Podemos descomponer un polinomio en un producto de dos factores utilizando Ruffini en el caso de que las raíces sean enteras.

Si resolvemos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones obtenidas x_1 y x_2 (enteras o no), son las raíces del polinomio $ax^2 + bx + c \rightarrow ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

Ejemplo: Factorizar $x^3 - x^2 - 3x + 3$

Posibles divisores 1,-1, 3, -3
$P(1)=1- 1 - 3 + 3 = 0$, luego 3 es raíz del polinomio.

	1	-1	-3	3
1		1	0	-3
	1	0	-3	0

$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x^2 - 3)$
$x^2 - 3$ no tiene raíces enteras. Resolvemos la ecuación $x^2 - 3 = 0$
$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \rightarrow x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

Ecuaciones de grado superior a 2

Suponemos que este tipo de ecuaciones ya se han simplificado todo lo posible para llegar a una ecuación cuyo primer miembro es un polinomio y cuyo segundo miembro es 0.

Si factorizamos el polinomio las raíces del polinomio serán las soluciones de la ecuación.

Ejemplo: $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$

Posibles divisores: 1 , -1 $\rightarrow$ $P(1) = 0$

	1	1	-1	-1
1		1	2	1
	1	2	1	0

$x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 2x + 1)(x - 1)$
El polinomio de 2º grado se puede descomponer mediante Ruffini, si hay soluciones enteras o resolviendo la ecuación de 2º grado $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{-2 \mp \sqrt{4 - 4{\cdot}1{\cdot}1}}{2} = \frac{-2 \mp \sqrt{0}}{2} = -1 \rightarrow \text{solución doble}$$

$(x^2 + 2x + 1) = (x+1)(x+1)$, luego la descomposición de $x^3 + x^2 - x - 1$ es
$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x+1)(x+1) \rightarrow$ raíces 1, -1
Buscamos las soluciones de $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x+1)(x+1) = 0 \rightarrow$ son soluciones $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

Ejemplo: $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Hemos de descomponer en factores.
Los divisores del término independiente son 1 y –1 → $P(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

	1	-1	-1	1
1		1	0	-1
	1	0	-1	0

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x^2 - 1)$
$(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$, Ruffini, resolviendo la ecuación o productos notables
$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1)$ → raíces: 1, -1
$x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)(x - 1)(x + 1) = 0$ → $x_1 = 1$ (doble), $x_2 = -1$

Ecuaciones bicuadradas

Se trata de ecuaciones que se pueden expresar en la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, donde a, b y c son tres números reales.

Para resolver una ecuación bicuadrada se hace el cambio de variable $x^2 = t$, así, $x^4 = (x^2)^2 = t^2$.

La ecuación expresada en función de t quedaría $ay^2 + by + c = 0$. Una vez resuelta esta ecuación se sustituyen sus soluciones en $x^2 = y$, obteniéndose así las soluciones para x.

Ejemplo: resolvamos la ecuación $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$. Hacemos el cambio de la variable $x^2 = t$ y la ecuación queda $t^2 - 4t - 12 = 0$. Resolvemos aplicando la fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado y las soluciones son $t_1=6$ y $t_2=-2$. Como $x^2 = t$, $x = \sqrt{t}$. Si t = 6 el valor de x se calcula así $x = \sqrt{6} = \pm\sqrt{6}$. Si t = -2 el valor de x se calcula así $x = \sqrt{-2}$. En este caso no hay soluciones reales. Luego las soluciones buscadas son $\sqrt{6}$ y $-\sqrt{6}$.

Ecuaciones irracionales

Se trata de ecuaciones en las que aparece alguna raíz cuadrada conteniendo en el radicando la incógnita de la ecuación. Para resolver estas ecuaciones se ha de aislar la raíz o una de las raíces que aparezcan en uno de los miembros de la ecuación. Después elevamos ambos miembros al cuadrado y continuamos operando con lo que nos quede. Muy importante es la comprobación de las soluciones para descartar alguna que se haya podido "colar".

Ejemplo: resolvamos la ecuación $\sqrt{x+1} = x$. Como la raíz ya está despejada elevamos al cuadrado y resolvemos:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2$$
$$x + 2 = x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1=2$ y $x_2=-1$.

Comprobamos las soluciones sustituyendo en la ecuación original:

$$\Rightarrow \sqrt{2+2} = 2$$
$$\sqrt{4} = 2$$

x = 2 es válida

$$\Rightarrow \sqrt{-1+2} = -1$$

$$\sqrt{1} \neq -1$$

x = -1 no es válida

Sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones a las que buscamos la solución común. Se pueden clasificar según,

El grado de las ecuaciones:

Sistema lineal: si todas las ecuaciones son lineales.
Sistema no lineal: si no todas las ecuaciones son lineales.

El número de ecuaciones o de incógnitas que tengan:

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas. ...

El número de soluciones:

Sistema **compatible** es el que tiene solución. Dependiendo del número de soluciones puede ser **compatible determinado** si tiene una única solución o **compatible indeterminado** si tiene múltiples soluciones.

Sistema **incompatible** es el que no tiene solución.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l} x+y=2 \\ x^2-y=0 \end{array}\right\}$ Sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

$\left.\begin{array}{l} x-y=2 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$ Sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. El método general de resolver sistemas de ecuaciones consiste en encontrar otro sistema equivalente de más fácil resolución. Se llaman transformaciones elementales (o de equivalencia) a aquellas modificaciones de un sistema lineal que lo transforman en otro equivalente. Las siguientes transformaciones son elementales.

Permutar dos ecuaciones.

Multiplicar una ecuación del sistema por un número distinto de 0.

Sumar a una ecuación del sistema otra multiplicada por un número.

Cambiar el orden de las incógnitas.

Despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en las demás ecuaciones.

Suprimir o añadir una ecuación que sea combinación lineal de las otras.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales podemos utilizar tres métodos:

Sustitución

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}2x+4y=7\\4x-5y=3\end{array}\right\}$

Se despeja la x de una de las ecuaciones $x=\dfrac{7-4y}{2}$

El valor de la x despejada una ecuación se sustituye en la x de la otra ecuación de abajo: $4\cdot\dfrac{7-4y}{2}-5y=3$ y se resuelve la ecuación

$$2\cdot(7-4y)-5y=3$$
$$14-8y-5y=3$$
$$14-13y=3$$
$$14-3=13y$$
$$11=13y \quad\Rightarrow\quad y={}^{11}\!/_{13}$$

El valor de la y obtenida se sustituye por la y de la ecuación de arriba.

$$x=\frac{7-4y}{2}=\frac{7-4\cdot\frac{11}{13}}{2}=\frac{7-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{91}{13}-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{47}{13}}{2}=\frac{47}{26}$$

Solución x = 47/26, y = 11/13

Igualación

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}2x+4y=7\\4x-5y=3\end{array}\right\}$

Se despeja la x de las dos ecuaciones x = (7 - 4y) / 2
x = (3 + 5y) /4

Se igualan las x, se resuelve la ecuación

$$\frac{7-4y}{2}=\frac{3+5y}{4}$$
$$2\cdot(7-4y)=3+5y$$
$$14-8y=3+5y$$
$$14-3=8y+5y$$
$$11=13y \quad\Rightarrow\quad y={}^{11}\!/_{13}$$

El valor de la y obtenida se sustituye por la y de cualquiera de las ecuaciones

$$x=\frac{7-4y}{2}=\frac{7-4\cdot\frac{11}{13}}{2}=\frac{7-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{91}{13}-\frac{44}{13}}{2}=\frac{\frac{47}{13}}{2}=\frac{47}{26}$$

Solución x = 47/26, y = 11/13

Reducción

Hemos de buscar un sistema equivalente en el cual una de las incógnitas tenga el mismo coeficiente, cambiado de signo en una de las ecuaciones.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{l}2x+4y=7\\4x-5y=3\end{array}\right\}$

Multiplicamos la 1ª ecuación por –2 → -2(2 x + 4y = 7)→ $-4x-8y=-14$
Se la sumamos a la segunda ecuación $\quad 4x-5y=3$

$$\begin{array}{r}-4x-8y=-14\\ \underline{4x-5y=3}\\ -13y=-11\end{array}$$

El nuevo sistema es $\left.\begin{array}{r}2x+4y=7\\-13y=-11\end{array}\right\}$

Despejamos la y: y = 11/13. Luego calculamos x en la primera ecuación:

$x=\dfrac{7-4y}{2}=47/26$

Sistema de ecuaciones lineales con tres (o más) incógnitas: Método de Gauss

El método de Gauss para la resolución de sistemas lineales se puede considerar como un generalización del de *reducción* (para los sistemas con dos o tres incógnitas). En esencia consiste en hacer, al sistema de ecuaciones lineales, determinadas transformaciones elementales a fin de obtener un sistema escalonado, más fácil de resolver.

Ejemplo: Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l}2x+3y-4z=2\\x-y-z=1\\x+2y+z=0\end{array}\right\}$

Permutamos las ecuaciones 1ª y 3ª para que el primer coeficiente sea 1:

$$\left.\begin{array}{l}x+2y+z=0\\x-y-z=1\\2x+3y-4z=2\end{array}\right\}$$

Dejamos la 1ª ecuación como está y la "operamos" sobre la 3ª y 2ª para eliminar x.
La 2º ecuación es el resultado de multiplicar la 1º por –1 y sumarla con la 2º
La 3º ecuación es el resultado de multiplicar la 1º por –2 y sumarla a la 3º

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\-3y-2z=1\\-y-6z=2\end{array}\right\}$$

Permutamos las ecuaciones 2ª y 3ª

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\-y-6z=2\\-3y-2z=1\end{array}\right\}$$

Dejamos la 1º y 2º como están. La 3º es el resultado de multiplicar la 2º por -3 y sumarla con la 3º

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\-y-6z=2\\16z=-5\end{array}\right\}$$

Hasta aquí es el método de Gauss ya se ha conseguido un sistema escalonado, ahora para resolverlo se procede despejando de abajo arriba:
z = - 5/16, de donde

y = - 6z - 2 = - 6 (-5/16) – 2 = -2/8 = -1/4
x = - 2y - z = - 2(-1/4) - (-5/16) = 13/16
La solución es: (13/16, -1/8, -5/16)

Ejemplo: Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ 2y+4x+5z=-7 \\ -5y-6x-z=-1 \end{array}\right\}$

Multiplicamos la 1ª ecuación por -2 y se la sumamos a la segunda:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ -z=11 \\ -5y-6x-z=-1 \end{array}\right\}$$

Permutamos las ecuaciones 2ª y 3ª:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ -5y-6x-z=-1 \\ -z=11 \end{array}\right\}$$

Multiplicamos la 1ª ecuación por 5 y se la sumamos a la 2ª:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x+3z=-9 \\ 4x+14z=-46 \\ -z=11 \end{array}\right\}$$

que es un sistema escalonado. Resolvemos despejando de abajo arriba:
z = -11
4x = - 46 - 14(-11); x = 27,
y = -9 - 2·27 - 3·(-11) = - 9 – 54 + 33, y = -30.
La solución es: (27, -30, -11)

Sistemas de ecuaciones no lineales

Un sistema de ecuaciones es no lineal cuando una de las ecuaciones no es lineal.

Si una de ellas es lineal se utiliza el método de sustitución, despejando de la lineal y sustituyendo en las no lineales. A veces, según la apariencia de las ecuaciones se pueden utilizar los otros métodos.

Ejemplo: Resolvamos $\left.\begin{array}{l} 2x+y=3 \\ 2x^2+xy=6 \end{array}\right\}$

Despejamos y en la 1º → y = 3 - 2x
Sustituimos en la 2º y operamos:

$2x^2 + x(3 - 2x) = 6$
$2x^2 +3x - 2x^2 = 6$
$3x = 6 \rightarrow x = 2$

sustituimos la x para obtener y → y = 3 - 2·2 = -1 → solución (2, -1)

Ejemplo: Resolvamos $\left.\begin{array}{l} y=x^2-3x \\ x+y=3 \end{array}\right\}$

sustituimos el valor de y de la 1º en la 2º y operamos:
$x + x^2 - 3x = 3 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ resolvemos la ecuación de 2º

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}= \begin{cases} 6/2=3 \\ -2/2=-1 \end{cases}$$

Si $x = 3 \rightarrow y = 0$

Si $x = -1 \rightarrow y = 4$

El sistema tiene dos soluciones (3, 0); (-1, 4)

Resolución de problemas mediante ecuaciones o sistemas

Para resolver un problema es conveniente realizar cuatro fases:

Comprender el problema. Identificar datos e incógnitas.

Determinar la relación entre los datos y las incógnitas. Escribir la ecuación o ecuaciones que relacionan datos e incógnitas.

Resolver la ecuación o el sistema por los métodos estudiados.

Examinar la solución obtenida. Comprobar si las soluciones obtenidas son válidas y proceder en consecuencia.

Vamos a resolver problemas de diferentes tipos.

De números

Halla un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.

Solución: Llamamos x al número que buscamos, la mitad del número es x/2 y su cuarta parte x/4

Entonces: $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=x$

$$\frac{2x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{4}{4}=\frac{4x}{4}$$

$$2x+x+4=4x$$

$$2x+x-4x=-4$$

$$-x=-4$$

$$x=4$$

El número buscado es 4.

Se atribuye a Pitágoras la siguiente respuesta sobre el número de sus discípulos: "Una mitad estudia matemáticas, una cuarta parte física, una quinta parte guarda silencio y además hay tres mujeres". ¿Cuántos discípulos tenía?

Solución: Llamamos x al número de sus discípulos.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+3=x$$

$$\text{mcm}=20 \quad \frac{10x}{20}+\frac{5x}{20}+\frac{4x}{20}+\frac{60}{20}=\frac{20x}{20}$$

$$10x+5x+4x+60=20x$$

$$10x+5x+4x-20x=-60$$

$$-x=-60$$

$$x=60$$

Tenía 60 discípulos.